

Б.П.吉米多维奇

数学分析

习题全解

4

原题译自俄文第13版

最新校订本

南京大学数学系
编

级 数

APC
全国出版集团

安徽人民出版社

经典名著最新版本

全书增补数百新题

题型最全题量最大

数学名家详细解析



《高次多项式函数分析习题全解》(一)——一次函数

《高次多项式函数分析习题全解》(二)——二次函数与二次方程

《高次多项式函数分析习题全解》(三)——不定方程——恒成立

《高次多项式函数分析习题全解》(四)——极值

《高次多项式函数分析习题全解》(五)——恒成立问题的处理——恒成立的恒分

《高次多项式函数分析习题全解》(六)——恒成立问题的处理——恒成立的恒分

《高次多项式函数分析习题全解》

ISBN 978-7-212-02698-1



9 787212 026981 >

定价:20.00 元

Б. П. 吉米多维奇

Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全解

(四)

南京大学数学系

廖良文 许宁 编著

毕秉钧 译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解. 4/(苏)吉米多维奇著. 廖良文, 许宁编著. —合肥:安徽人民出版社, 2005

ISBN 978-7-212-02698-1

I. 吉… II. ①吉…②廖…③许… III. 数学分析—高等学校—解
题 IV. 017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113597 号

吉米多维奇数学分析习题全解(四)

(苏)吉米多维奇 著 廖良文 许 宁 编著 毕秉钧 译

责任编辑	王玉法	封面设计	王国亮
出版发行	安徽人民出版社		
地 址	合肥市政务文化新区圣泉路 1118 号出版传媒广场		
	邮编:230071		
发 行 部	0551-3533258	0551-3533292(传真)	
经 销	新华书店		
印 刷	南京新洲印刷有限公司		
开 本	880×1230 1/32	印张	14 字数 320 千
版 次	2010 年 1 月第 3 版(最新校订本)		
标准书号	ISBN978-7-212-02698-1		
定 价	20.00 元		

本版图书凡印刷、装订错误可及时向安徽人民出版社调换。

前 言

数学分析是大学数学系的一门重要必修课,是学习其它数学课的基础。同时,也是理工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作,它在中国有很大影响,早在上世纪五十年代,国内就出版了该书的中译本。安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》,以俄文第13版(最新版本)为基础,新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题,共计有五千道习题,数量多,内容丰富,包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大,初学者不易解答。为了给广大高校师生提供学习参考,应安徽人民出版社的同志邀请,我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知,学习数学,做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题,可以巩固我们所学到的知识,加深我们对基础概念的理解,还可以提高我们的运算能力,逻辑推理能力,综合分析能力。所以,我们希望读者遇到问题一定要认真思考,努力找出自己的解答,不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答,许宁编写了第六、七章习题的解答。本书的编写过程中,我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解,在许多方面得到了启发,谨对原书的作者表示感谢,在此,不再一一列出。

本书自出版以来受到广大高校师生的高度肯定,深受读者喜爱,畅销不衰。此次再版,我们纠正了前一版中存在的个别错误,对版面进行了适当调整。在此对为此书付出辛勤劳动的各位老师表示深切的谢意!

由于我们水平有限,错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编 者

目 录

第五章 级数	(1)
§ 1. 数值级数 同号级数收敛性的判别法	(1)
§ 2. 交错级数收敛性的判别法	(68)
§ 3. 级数的运算	(110)
§ 4. 函数项级数	(119)
§ 5. 幂级数	(194)
§ 6. 傅里叶级数	(284)
§ 7. 级数的求和法	(329)
§ 8. 用级数求解定积分	(368)
§ 9. 无穷乘积	(379)
§ 10. 斯特林公式.....	(424)
§ 11. 用多项式逼近连续函数.....	(428)

第五章 级数

§ 1. 数值级数 同号级数收敛性的判别法

1. 一般概念 对于数值级数: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ①

若存在有穷极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S (\text{级数的和})$$

其中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,

则级数 ① 称为收敛的, 反之, 级数 ① 称为发散的.

2. 柯西准则 级数 ① 收敛, 充要条件是: 对于任何 $\epsilon > 0$ 都存在 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ (n 和 p 为自然数) 时, 下列不等式成立

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \epsilon,$$

特别是若级数收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

3. 比较判别法 1 除级数 ① 之外, 设有以下级数:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \quad \text{②}$$

若当 $n \geq n_0$ 时, 以下不等式成立:

$$0 \leq a_n \leq b_n,$$

则 (1) 由级数 ② 的收敛可推出级数 ① 的收敛; (2) 由级数 ① 的发散可推出级数 ② 的发散.

特别是当 $n \rightarrow \infty$ 时, 若 $a_n \sim b_n$, 则正项级数 ① 和 ② 同时收敛或同时发散.

4. 比较判别法 2 设

$$a_n = O^* \left(\frac{1}{n^p} \right) I^{①},$$

则(1) 当 $p > 1$ 时, 级数 ① 收敛; (2) 当 $p \leq 1$ 时级数 ① 发散.

5. 达朗贝尔判别法 若

$$a_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$

则(1) 当 $q < 1$ 时, 级数 ① 收敛; (2) 当 $q > 1$ 时级数 ① 发散.

6. 柯西判别法 若

$$a_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$

则(1) 当 $q < 1$ 时, 级数 ① 收敛; (2) 当 $q > 1$ 时级数 ① 发散.

7. 拉阿比判别法 若

$$a_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$

则(1) 当 $p > 1$ 时, 级数 ① 收敛; (2) 当 $p < 1$ 时级数 ① 发散.

8. 高斯判别法 若

$$a_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

且 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\epsilon}},$

其中 $|\theta_n| < C$, 而 $\epsilon > 0$, 则(1) 当 $\lambda > 1$ 时, 级数 ① 收敛; (2) 当 $\lambda < 1$ 时级数 ① 发散; (3) 当 $\lambda = 1$ 时, 若 $\mu > 1$, 级数 ① 收敛, 若 $\mu \leq 1$ 则发散.

9. 柯西积分判别法 若 $f(x) (x \geq 1)$ 为非负递减连续函数,

则级数: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同时收敛或同时发散.

① 符合 O^* 的意义见第 1 章第 6 节 1.

直接证明下列级数的收敛性并求出它们的和(2546 ~ 2552).

【2546】 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \cdots$

证 由

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}},$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0,$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}.$

故该级数收敛, 其和为 $\frac{2}{3}.$

【2547】 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots$

证 由

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right), \end{aligned}$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

故该级数收敛, 其和为 $\frac{3}{2}.$

【2548】 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots$

证 由 $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$,

有 $2S_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$,

于是
$$\begin{aligned} S_n &= 2S_n - S_n \\ &= 1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{2^2} - \frac{3}{2^2}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{2n-3}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}. \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + 2 = 3$.

故该级数收敛,其和为 3.

【2549】 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)} + \cdots$.

证 因

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$.

故该级数收敛,其和为 1.

【2550】 $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$

证 由

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)},$$

考察通项

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right],$$

有
$$S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right),$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}.$

故该级数收敛, 其和为 $\frac{1}{3}$

【2551】 (1) $q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \cdots + q^n \sin n\alpha + \cdots;$

(2) $q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \cdots + q^n \cos n\alpha + \cdots (|q| < 1).$

证 令 $z = q(\cos \alpha + i \sin \alpha),$

其中 i 为虚数单位.

而 $z^n = q^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha),$

于是有
$$\sum_{j=1}^n z^j = \sum_{j=1}^n q^j (\cos j\alpha + i \sin j\alpha)$$

$$= \sum_{j=1}^n q^j \cos j\alpha + i \sum_{j=1}^n q^j \sin j\alpha.$$

令 $S_n^{(1)} = q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \cdots + q^n \sin n\alpha,$

$S_n^{(2)} = q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \cdots + q^n \cos n\alpha,$

有
$$\sum_{j=1}^n z^j = S_n^{(2)} + i S_n^{(1)}.$$

而 $\sum_{j=1}^n z^j = \frac{z(1-z^n)}{1-z},$

因为 $|q| < 1,$

故有 $|z| < 1,$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0.$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^{(2)} + iS_n^{(1)}) = \frac{z}{1-z} = \frac{q\cos\alpha - q^2 + iq\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2}.$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} = \frac{q\cos\alpha - q^2}{1-2q\cos\alpha + q^2},$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} = \frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2},$$

所以 (1), (2) 级数收敛, 其和分别是 $\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2},$

$$\frac{q\cos\alpha - q^2}{1-2q\cos\alpha + q^2}.$$

【2552】 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$

证 因

$$\begin{aligned} & \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \\ &= (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \end{aligned}$$

有
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) \\ &= [(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - \sqrt{1})] \\ &\quad + [(\sqrt{4} - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})] \\ &\quad + [(\sqrt{5} - \sqrt{4}) - (\sqrt{4} - \sqrt{3})] + \cdots \\ &\quad + [(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})] \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{2} + 1 \\ &= 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}. \end{aligned}$$

故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \sqrt{2}.$

所以该级数收敛, 其和是 $1 - \sqrt{2}$.

【2553】 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 的收敛性.

提示: 证明当 $x \neq k\pi$ (k 为整数) 时, 使得在 $n \rightarrow \infty$ 时 $\sin nx \rightarrow 0$ 不可能.

证 当 $x = k\pi$, k 为整数, 有 $\sin k\pi = 0$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nk\pi = 0$, 收敛.

当 $x \neq k\pi$ 时, 我们证明 $\sin nx \not\rightarrow 0$.

反证法, 设 $\sin nx \rightarrow 0$, 于是有 $\sin(n+1)x \rightarrow 0$.

而 $\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x$

因 $x \neq k\pi$, 有 $\sin x \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{于是有 } 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n+1)x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin nx \cos x) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos nx \sin x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos nx \sin x), \end{aligned}$$

我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx = 0$.

又 $\cos^2 nx + \sin^2 nx = 1 (*)$,

对 $(*)$ 两边取关于 n 的极限有

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 nx + \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 nx = 0,$$

矛盾.

所以 $\sin nx \not\rightarrow 0, n \rightarrow \infty, x \neq k\pi$,

于是我们有 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$, 当 $x = k\pi$, k 为整数时, 收敛, 当 $x \neq k\pi$, k 为整数时发散.

【2554】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则把该级数的各项重新组

合且不破坏其先后次序所得的级数: $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, 其中

$$A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \quad (p_1 = 1, p_1 < p_2 < \cdots),$$

也收敛并具有同样的和. 反之是不正确的, 举例说明.

证 记 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的前 n 项和为 t_n , 有

$$\begin{aligned} t_n &= A_1 + A_2 + \cdots + A_n \\ &= \sum_{i=p_1}^{p_2-1} a_i + \sum_{i=p_2}^{p_3-1} a_i + \cdots + \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \\ &= \sum_{i=1}^{p_{n+1}-1} a_i = S_{p_{n+1}-1}, \end{aligned}$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{p_{n+1}-1}$ 存在.

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛且与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和相同.

又 $2 - 2 + 2 - 2 + \cdots$ 发散, 但 $(2 - 2) + (2 - 2) + (2 - 2) + \cdots$ 收敛, 所以各项重新组合后收敛, 但原级数不一定收敛.

【2555】 证明: 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项是正值, 若将该级数各项重新组合结果所得出的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 则该级数也收敛.

证 令

$$t_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n,$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, a_n \geq 0, \forall n.$$

于是有 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ 存在, 所以 $\{t_n\}$ 是有界数列. 因此, 对给定的 n , 存在 p_n , 使得 $S_n < t_{p_n} < M$, M 为一常数, 又 S_n 单调上升, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 故该级数也收敛.

研究下列级数的收敛性(2556 ~ 2664).

【2556】 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$.

解 因级数的通项为 $a_n = (-1)^{n+1}$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在, 所以

该级数发散.

【2557】 $0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \cdots$.

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0.001} = 1$, 所以该级数发散.

【2558】 $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

所以该级数收敛.

【2559】 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$.

解法一 我们有如下定理:

设 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是

$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$ 收敛.

于是有 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2 \cdot 2^k - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^{k+1} - 1},$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^k}{2^{k+1} - 1} = \frac{1}{2},$

所以 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 发散, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散.

解法二 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散而 $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} > 0$, 故级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散.

【2560】 $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \cdots + \frac{1}{1000n+1} + \cdots$.

解 因为 $\frac{1}{1000n+1} > \frac{1}{1000(n+1)}$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000(n+1)}$ 发散, 所以该级数发散.

【2561】 $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{n}{2n-1} + \cdots$.

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2},$$

所以该级数发散.

【2562】 $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$.

解 因为 $a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$,

而 $2^k a_{2^k} = \frac{2^k}{(2 \cdot 2^k - 1)^2} = \frac{1}{2^k (2 - 2^{-k})^2},$

又 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{k+1} (2 - 2^{-k-1})^2}}{\frac{1}{2^k (2 - 2^{-k})^2}} = \frac{1}{2} < 1,$

所以 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 收敛.

【2563】 $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \cdots$.

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛,

而 $\frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 收敛.

【2564】 $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \cdots$.

解 因为

$$\begin{aligned}\sqrt{(2n-1)(2n+1)} &< \sqrt{(2n+1)^2} \\ &= 2n+1 < 2(n+1),\end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} > \frac{1}{2(n+1)}$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ 发散.

【2565】 证明: 等差级数各项倒数组成的级数是发散的.

证 设等差级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (a + (n-1)d)$, d 为公差.

当 $d > 0$ 时, 存在 $n_0 > 0$, 有 $(n_0-1)d > a$, 于是当 $n \geq n_0$ 时, 有 $2(n-1)d > a + (n-1)d$,

从而 $\frac{1}{a + (n-1)d} > \frac{1}{2(n-1)d} > \frac{1}{2nd} > 0$,

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + (n-1)d}$ 发散.

当 $d = 0$ 时, $a \neq 0$, 此时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a}$ 发散.

当 $d < 0$ 时, 与 $d > 0$ 时级数敛散性等价, 故 $d < 0$ 时级数发散, 因此, 等差级数各项倒数的级数是发散的.

【2566】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (A)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (B)$ 收敛, 且 $a_n \leq c_n \leq b_n (n = 1, 2, \dots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (C)$ 也收敛. 若级数 (A) 和 (B) 是发散的, 则级数 (C) 的收敛性会怎样?

证 因为 $a_n \leq c_n \leq b_n (n = 1, 2, \dots)$, 所以 $0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n, n = 1, 2, \dots$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛. 于是有 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$

收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

若级数(A)和(B)皆发散,则级数(C)可能收敛,也可能发散
如 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right)$ 发散.

但当 $c_n = 0$ 时, $n = 1, 2, \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 当 $c_n = \frac{1}{n}$ 时, $n = 1, 2, \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散.

【2567】 假定已知两个具非负项的发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 下列级数的收敛性如何?

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) \text{ 及 } (2) \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n).$$

解 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ 可能收敛, 也可能发散.

$$\text{如 } a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n+1}, n = 1, 2, \dots,$$

$$\text{有 } \min(a_n, b_n) = \frac{1}{n+1},$$

知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散, 又

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{3}, b_n = \frac{1 - (-1)^n}{3},$$

知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 皆不存在, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = 0 + 0 + \dots$ 收敛.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n) \text{ 发散.}$$

事实上 $\max(a_n, b_n) \geq a_n \geq 0$,

又已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 发散.

【2568】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geq 0)$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也

收敛. 反之是不正确的, 举例说明.

证 因为 $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

于是存在 M , 当 $n > M$ 时, $0 \leq a_n < 1$, 因此当 $n > M$ 时, $0 \leq a_n^2 < a_n$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 反之不成立, 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

【2569】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

证 因为

$$0 \leq |a_n b_n| \leq \frac{a_n^2 + b_n^2}{2},$$

而 $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 于是有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ 收敛. 所以

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛. 又

$$(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n,$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, 故有 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 收敛.

因为 $\frac{|a_n|}{n} \leq \frac{a_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2}$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

【2570】 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 (1) 设 $a > 0$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a$, 所以存在 $M > 0$, 当 $n > M$ 时有

$$na_n > \frac{a}{2},$$

即 $a_n > \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{n}, n > M.$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2} \frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(2) 设 $a < 0$, 取 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $a + \varepsilon_0 < 0$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a,$$

所以存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$na_n < a + \varepsilon_0,$$

即 $\frac{1}{n} < \frac{1}{a + \varepsilon_0} a_n.$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + \varepsilon_0} a_n$ 发散, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

【2571】 证明: 若各项为正且其值单调递减项的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

证 因为 $a_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$, 且 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots$, 并设 $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, 于是任取 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$(n - N)a_n \leq a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_n < S - S_N,$$

故 $na_n < \frac{n}{n - N}(S - S_N).$

因为 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S,$

且 $0 \leq S_N < S,$

于是任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0 , 使得

$$S - S_{N_0} < \varepsilon,$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n - N_0} = 1,$

于是存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, 有

$$\frac{n}{n - N_0} < \frac{3}{2}.$$

现取 $M = \max\{N_0, n_0\}$,

于是当 $n \geq M$ 时有

$$0 \leq na_n < \frac{3}{2}\epsilon,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

【2572】 若当 $p = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的吗?

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不一定收敛.

我们知道, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 由柯西准则一定有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0, p = 1, 2, 3, \dots$$

但当 $p = 1, 2, 3, \dots$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0,$$

不能推得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 如令 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, 于是

$$\begin{aligned} 0 &< a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} < \frac{p}{\sqrt{n+1}}, \end{aligned}$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{\sqrt{n+1}} = 0, \forall p \in \mathbb{N}$,

故对一切 p 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0$.

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

利用柯西准则, 证明下列级数的收敛性(2573 ~ 2575).

【2573】 $a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots (|a_n| < 10).$

证 $\forall m \in \mathbb{N},$

$$\begin{aligned} |S_{n+m} - S_n| &= \left| \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+m-1}}{10^{n+m-1}} \right| \\ &\leq \frac{|a_n|}{10^n} + \frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{|a_{n+m-1}|}{10^{n+m-1}} \\ &\leq \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} + \cdots + \frac{1}{10^{n+m-2}} \\ &= \frac{1}{10^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{m-1}} \right) \\ &< \frac{1}{10^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9 \cdot 10^{n-2}}, \end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$, 由 $\frac{1}{9 \cdot 10^{n-2}} < \epsilon$, 有 $n > 2 - \lg 9\epsilon$.

取 $N = [2 - \lg 9\epsilon]$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|S_{n+m} - S_n| < \epsilon, \forall m \in \mathbb{N},$$

故该级数收敛.

【2574】 $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{2^n} + \cdots$

证 $\forall m \in \mathbb{N},$

因为 $|S_{n+m} - S_n|$

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin(n+m)x}{2^{n+m}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+m}} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^m} \right) \\ &< \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

$\forall \epsilon > 0$, 由 $\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$, 有 $n > 1 - \log_2 \epsilon$, 今取 $N = [1 - \log_2 \epsilon]$

于是当 $n > N$ 时, 有

$$|S_{n+m} - S_n| < \epsilon, \forall m \in \mathbb{N},$$

故该级数收敛.

$$\begin{aligned} \text{【2575】} \quad & \frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots \\ & + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \dots. \end{aligned}$$

证 $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & |S_{n+m} - S_n| \\ &= \left| \frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \frac{\cos(n+2)x - \cos(n+3)x}{n+2} \right. \\ & \quad \left. + \dots + \frac{\cos(n+m)x - \cos(n+m+1)x}{n+m} \right| \\ &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) \cos(n+2)x \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} \right) \cos(n+3)x + \dots \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{n+m} - \frac{1}{n+m-1} \right) \cos(n+m)x - \frac{\cos(n+m+1)x}{n+m} \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ & \quad + \dots + \left(\frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m} \right) + \frac{1}{n+m} \\ &= \frac{2}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\forall \epsilon > 0, \text{由 } \frac{2}{n+1} < \epsilon, \text{有 } n > \frac{2}{\epsilon} - 1.$$

$$\text{取 } N = \left[\frac{2}{\epsilon} - 1 \right],$$

于是当 $n > N$ 时,有

$$|S_{n+m} - S_n| < \epsilon, \forall m \in \mathbb{N}.$$

故该级数收敛.

$$\text{【2575. 1】} \quad \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots.$$

提示:利用不等式:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n=2,3,\dots).$$

解 由

$$\begin{aligned} |S_{n+m} - S_n| &= \left| \frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \dots + \frac{\cos x^{n+m}}{(n+m)^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+m)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{(n+m-1)(n+m)} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m} \right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

于是对 $\forall \epsilon > 0$, 令 $\frac{1}{n} < \epsilon$,

有 $n > \frac{1}{\epsilon}$, 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 所以当 $n > N$ 时, 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 有

$|S_{n+m} - S_n| < \epsilon$ 因此该级数收敛.

利用柯西准则, 证明下列级数的发散性(2576 ~ 2577).

【2576】 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$.

证 令 $\epsilon_0 = \frac{1}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \text{由 } |S_{2n} - S_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \\ &> \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n\text{项}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

故该级数发散.

$$\text{【2577】 } 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$\text{证 令 } 0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{6}, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned} \text{由 } |S_n - S_{3n}| &= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} \\ &\quad + \frac{1}{3n+5} - \frac{1}{3n+6} + \dots + \frac{1}{6n-2} + \\ &\quad \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n} \\ &> \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+6} \\ &\quad + \frac{1}{3n+6} - \frac{1}{3n+6} + \dots + \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{6n} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &> \frac{1}{3} \underbrace{\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \right)}_{n \text{ 项}} = \frac{1}{6} > \varepsilon_0, \end{aligned}$$

故该级数发散.

$$\text{【2577. 1】 } \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$$

$$\text{证 取 } 0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{由 } |S_{2n+1} - S_n| &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} \\ &> \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+2} > \underbrace{\frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{2n+2}}_{n+1 \text{ 项}} \\ &= \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

故该级数发散.

利用比较、达朗贝尔或柯西判别法, 研究以下级数的收敛性 (2578 ~ 2590).

$$\text{【2578】} \quad \frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \cdots + \frac{1000^n}{n!} + \cdots.$$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1,$$

所以该级数收敛.

$$\text{【2579】} \quad \frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \cdots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \cdots.$$

解 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1, \end{aligned}$$

故该级数收敛.

$$\text{【2580】} \quad \frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \cdots + \frac{n!}{n^n} + \cdots.$$

解 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = e^{-1} < 1, \end{aligned}$$

故该级数收敛.

$$\text{【2581】} \quad (1) \quad \frac{2 \cdot 1!}{1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \cdots + \frac{2^n n!}{n^n} + \cdots;$$

$$(2) \frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^3 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \cdots + \frac{3^n n!}{n^n} + \cdots$$

解 (1) 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{e} < 1, \end{aligned}$$

故该级数收敛.

(2) 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{e} > 1, \end{aligned}$$

故该级数发散.

$$\text{【2582】} \frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \cdots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \cdots$$

解 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1, \end{aligned}$$

故该级数收敛.

$$\text{【2583】} \frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots$$

解 因为

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1000 \cdot 10001 \cdots (1000+n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}}{\frac{1000 \cdot 10001 \cdots (1000+n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000+n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,\end{aligned}$$

故该级数收敛.

$$\text{【2584】} \quad \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \cdots$$

解 因为

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4 \cdot 7 \cdots (3n+4)}{2 \cdot 6 \cdots (4n+2)}}{\frac{4 \cdot 7 \cdots (3(n-1)+4)}{2 \cdot 6 \cdots (4(n-1)+2)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1,\end{aligned}$$

故该级数收敛.

$$\text{【2585】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}).$$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2}) = \sqrt{2} - 1 < 1,$$

故该级数收敛.

$$\text{【2585. 1】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ 式中}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{若 } n = m^2, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{若 } n \neq m^2 \end{cases} \quad (m \text{ 为自然数}).$$

解 令 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 对应部分和为 S_n , $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 对应的部分和为 t_n 而 $S_n < 2t_n$, $\forall n$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ 存在, 故该级数收敛.

【2582. 2】 $\sum_{n=1}^{\infty} nx \prod_{k=1}^n \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}.$

解 $x=0$ 时, 该级数显然收敛, 现考察 $x \neq 0$, 因为

$$|a_n| = \left| nx \prod_{k=1}^n \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} \right| \leq \frac{n|x|}{(1+x^2)^n},$$

令 $b_n = \frac{n|x|}{(1+x^2)^n},$

而
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)|x|}{(1+x^2)^{n+1}}}{\frac{n|x|}{(1+x^2)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{1+x^2} \\ = \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|x|}{(1+x^2)^n}$ 收敛, 所以由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

【2586】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

故该级数收敛.

【2587】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}.$

解 因为

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^n} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 0,$$

$$\text{令 } b_n = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

$$\text{有 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{e} \neq 0.$$

于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$ 发散.

$$\text{【2588】 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$$

解 因为 $n > 1$ 时, $\ln n < n$, 故

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > 0,$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 发散, 所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ 发散.

$$\text{【2589】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

解 因为 $n > 1$ 时

$$\begin{aligned} 0 < \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}} &< \frac{n^{n-1}}{(n^2 + 2n + 1)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &< \frac{n^{n-1}}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 收敛.

$$\text{【2589. 1】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}.$$

解 令

$$a_n = \frac{n^5}{2^n + 3^n}, b_n = \frac{n^5}{2 \cdot 2^n}, n \geq 1,$$

于是有 $b_n > a_n > 0, n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{2 \cdot 2^{n+1}}}{\frac{n^5}{2 \cdot 2^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$ 收敛.

$$\text{【2589. 2】 } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

解 令

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)} > 0, n \geq 2,$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{n-1}}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{e^2} < 1, \end{aligned}$$

故该级数收敛.

$$\begin{aligned} \text{【2590】 } &\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ &+ \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots \end{aligned}$$

提示: $\sqrt{2} = 2\cos \frac{\pi}{4}$.

$$\text{解 因为 } \sqrt{2} = 2\cos \frac{\pi}{4} = 2\sin \frac{\pi}{4},$$

$$\text{于是 } \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2\left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sin \frac{\pi}{8},$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} &= \sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}} \\ &= \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}} = 2\sin\frac{\pi}{16},\end{aligned}$$

由数学归纳法知通项

$$a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}},$$

而
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1,$$

于是该级数收敛.

【2591】 证明:若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (a_n > 0).$$

则 $a_n = o(q_1^n)$, 其中 $q_1 > q$.

证 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$,

根据 141 题的结论,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

取 $\epsilon = \frac{1}{2}(q_1 - q) > 0$,

于是存在 N , 当 $n > N$ 时有

$$|\sqrt[n]{a_n} - q| < \epsilon,$$

从而有 $\sqrt[n]{a_n} < q + \epsilon = \frac{q + q_1}{2} = \frac{q + q_1}{2q_1} \cdot q_1.$

令

$$\mu = \frac{q + q_1}{2q_1},$$

由 $q_1 > q$,

有 $\mu < 1$,

于是有 $a_n < \mu^n q_1^n$.

从而 $a_n = o(q_1^n)$.

【2591. 1】 设对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 的各项, 当 $n \geq n_0$ 时 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho < 1$ 成立,

证明: 对于级数的其他余项

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$$

若 $n \geq n_0$, 则估算为 $R_n \leq a_{n_0} \cdot \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}$.

证 因为当 $n \geq n_0$ 时

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho < 1,$$

于是 $a_{n+1} \leq \rho a_n, a_{n+2} \leq \rho a_{n+1} \leq \rho^2 a_n, \cdots,$

$$a_{n+p} \leq \rho^p a_n, \forall p \in \mathbb{N}.$$

因此 $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \leq a_n (\rho + \rho^2 + \cdots + \rho^p)$

$$\leq \frac{a_n \rho}{1-\rho},$$

于是有 $R_n \leq \frac{a_n \rho}{1-\rho}$.

【2591. 2】 取级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(4n)!!}$ (其中 $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n)$) 多少项就足以使相应部分的和 S_n 小于级数和 S 达到 $\epsilon = 10^{-6}$?

解 $(2n)!! = 2^n n!, (4n)!! = (2 \cdot 2n)!! = 2^{2n} (2n)!,$ 故

$$a_n = \frac{[(2n)!!]^2}{(4n)!!} = \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}{(2n)! \cdot 2^{2n}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(n!)}{(n+1) \cdots (n+n)} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\text{而 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \leq \frac{1}{3} < 1,$$

记 $\rho = \frac{1}{3}$, 由 2591. 1 的结论知

$$s - s_n = R_n \leq a_n \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

因此,要使 $R_n \leq 10^{-6}$, 可取 $n \geq 20$.

【2592】 证明:若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \quad (a_n > 0),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

相反的结论不正确. 研究例题:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

证 取 $\varepsilon > 0$, 使得 $q + \varepsilon < 1$, 由

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

故存在 N , 当 $n \geq N$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = \lambda < 1,$$

于是有 $0 < a_n \leq a_N \lambda^{n-N}, n \geq N$.

因为 $\sum_{n=N}^{\infty} \lambda^{n-N}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 收敛. 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

反之不成立, 如

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots,$$

显然收敛, 而

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}, & n = 2m+1, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^m, & n = 2m. \end{cases}$$

于是有 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$.

【2593】 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 存在

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad (1)$$

则也存在

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q. \quad (2)$$

相反的结论不正确:若存在极限 (2), 则极限 (1) 也可能不存在.

证 前半部分是 141 的结论(略)

反之不成立, 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{但} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2[3+(-1)^n]} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n \text{ 为偶数,} \\ 1, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

故极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在.

【2594】 证明:若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad (a_n \geq 0).$$

则(1) 当 $q < 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (2) 而当 $q > 1$ 时这个级数是发散的(广义柯西判别法).

证 (1) 取 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1-q}{2}$,

因 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$,

于是存在 n_0 , 使得当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon_0,$$

故 $0 < \sqrt[n]{a_n} < \frac{q+1}{2} \quad (n \geq n_0).$

也就是 $0 < a_n < \left(\frac{q+1}{2}\right)^n \quad (n \geq n_0).$

又 $0 < \frac{q+1}{2} < 1,$

于是级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^n$ 收敛. 从而 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛, 结论成立.

(2) 因为 $q > 1$, 因此必有无穷多个 a_n , 有 $\sqrt[n]{a_n} > 1$ 成立.
故 $a_n > 1,$

于是这样的 a_n 不可能趋于零, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

研究下列级数的收敛性(2595 ~ 2597).

【2595】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}.$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

故该级数收敛.

【2596】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}.$

解 因为

$$\left| \frac{n \cos^2 n \frac{\pi}{3}}{2^n} \right| \leq \frac{|n|}{2^n},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n|}{2^n}$ 收敛, 所以该级数收敛.

【2597】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}.$

解 因为

$$0 < \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n} < \frac{n^3 (\sqrt{2} + 1)^n}{3^n},$$

现考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$ 的敛散性.

因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3(\sqrt{2}+1)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}+1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1, \end{aligned}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$ 收敛, 故该级数收敛.

【2597. 1】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$

解 因为

$$0 \leq \frac{1+\cos n}{2+\cos n} = 1 - \frac{1}{2+\cos n} \leq \frac{2}{3}.$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2(n+1)-\ln(n+1)}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-\ln n}} = \frac{2}{3} < 1$, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-\ln n}$ 收敛, 所以原级数也收敛.

利用拉阿比和高斯判别法, 研究下列级数的收敛性(2598 ~ 2605).

【2598】 $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^p + \dots$

解 由 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p$,

于是
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

所以当 $\frac{p}{2} > 1$ 时, 即 $p > 2$ 时该级数收敛.

$$\text{【2599】 } \frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(b+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots$$

$$(a > 0, b > 0, d > 0).$$

解 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b+nd}{a+nd},$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b+nd}{a+nd} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)n}{a+nd} = \frac{b-a}{d}, \end{aligned}$$

所以当 $\frac{b-a}{d} > 1$ 时, 该级数收敛.

$$\text{【2600】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}.$$

解 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+p}$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+p} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e} (1+t)^{\frac{1}{t}+p} - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{(\frac{1}{t}+p) \ln(1+t)} - e}{te} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{1+(p-\frac{1}{2})t+O(t)} - e}{te} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{(p-\frac{1}{2})t+O(t)} - 1}{t} = p - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以当 $p - \frac{1}{2} > 1$ 时, 即 $p > \frac{3}{2}$ 时, 该级数收敛.

$$\text{【2601】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}) \cdots (2+\sqrt{n})}.$$

解 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2 + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}},$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2 + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = +\infty. \end{aligned}$$

所以该级数收敛.

$$\text{【2602】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)} \quad (q > 0).$$

解 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \left(1 + \frac{q}{n+1} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^p \left(1 + \frac{q}{n+1} \right) - 1 \right] \\ &\stackrel{t = \frac{1}{n}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^p \left(1 + \frac{qt}{1+t} \right) - 1}{t} \\ &= p + q. \end{aligned}$$

所以当 $p + q > 1$ 时, 该级数收敛.

$$\text{【2603】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}, \quad (p > 0, q > 0).$$

解 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^q \frac{1+n}{p+n},$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^q \frac{1+n}{p+n} - 1 \right) \\ &\stackrel{t = \frac{1}{n}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+t)^{q+1}}{1+pt} - 1}{t} \\ &= q + 1 - p. \end{aligned}$$

所以当 $q + 1 - p > 1$ 时, 即 $q > p$ 时, 该级数收敛.

【2604】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \neq \frac{1}{n^q}.$

解 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^p \left(\frac{n+1}{n} \right)^q,$$

于是

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^p \left(\frac{n+1}{n} \right)^q - 1 \right) \\ & \stackrel{t = \frac{1}{n}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2+2t}{2+t} \right)^p (1+t)^q - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^p (1+t)^{p+q} - (2+t)^p}{t(t+2)^p} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^p (p+q)(1+t)^{p+q-1} - p(2+t)^{p-1}}{(2+t)^p + tp(2+t)^{p-1}} \\ &= \frac{2^p (p+q) - 2^{p-1} p}{2^p} = q + \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

所以当 $p + \frac{q}{2} > 1$ 时, 该级数收敛.

【2605】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{q(q+1) \cdots (q+n-1)} \right]^a \quad (p > 0, q > 0).$

解 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{q+n}{p+n} \right)^a,$$

于是

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(\frac{q+n}{p+n} \right)^a - 1 \right) \\ & \stackrel{t = \frac{1}{n}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1+qt}{1+pt} \right)^a - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+qt)^a - (1+pt)^a}{t(1+pt)^a} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a(1+qt)^{a-1}q - a(1+pt)^{a-1}p}{(1+pt)^a + ta(1+pt)^{a-1}p} \end{aligned}$$

$$= \alpha(q-p), (\alpha \neq 0).$$

所以当 $\alpha(q-p) > 1$ 时, 该级数收敛, $\alpha = 0$ 时, 该级数显然发散.

【2606】 证明: 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$, 若当 $n \rightarrow \infty$ 时, 以下条件成立:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

则 $a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\epsilon}}\right)$.

其中 $\epsilon (> 0)$ 任意小, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时, 若 $p > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 亦即在 $n \geq n_0$ 时单调递减, 当 $n \rightarrow \infty$ 时趋向于零.

证 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

对上式两边取对数有

$$\begin{aligned} \ln a_n - \ln a_{n+1} &= \ln\left(1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}(p + \alpha_n), \end{aligned}$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

于是有 $\ln a_1 - \ln a_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}(p + \alpha_n)$,

又因为 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N-1} = \ln(N-1) + C + o(1)$,

其中 C 为欧拉常数, 而

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha_n}{n}}{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_N = 0,$$

$$\text{令 } l_N = \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{n} \right) / \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \right),$$

于是 $l_N = o(1), (N \rightarrow \infty \text{ 时}).$

我们有

$$\begin{aligned} \ln a_1 - \ln a_N &= (p + l_N) \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \\ &= (p + l_N)(C + \ln(N-1)) + o(1) \\ &= (p + l_N) \ln(N-1) + pC + o(1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \ln a_N &= -(p + l_N) \ln(N-1) + \ln a_1 - pC + o(1) \\ &= -(p + l_N) \ln(N-1) + k + o(1), \end{aligned}$$

$$\text{这里 } k = \ln a_1 - pC.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } a_N &= e^{k+o(1)} \cdot (N-1)^{-(p+l_N)} \\ &= e^{k+o(1)} \left(\frac{N-1}{N} \right)^{-(p+l_N)} \cdot N^{-p} \cdot N^{-l_N} \end{aligned}$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$, 当 N 充分大时有

$$|l_N| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\text{故 } N^{-l_N} < N^{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

$$\text{又 } \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N-1}{N} \right)^{-(p+l_N)} = 1,$$

所以, 当 N 充分大时, 有

$$0 \leq a_N \leq C \cdot N^{\frac{\varepsilon}{2}} N^{-p} = o\left(\frac{1}{N^{p-\frac{\varepsilon}{2}}}\right),$$

其 C 是常数, 于是

$$a_N = o\left(\frac{1}{N^{p-\varepsilon}}\right).$$

命题得证.

确定一般项 a_n 的减小 m 阶, 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性, 若
(2607 ~ 2641).

$$\text{【2607】 } a_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q}.$$

其中 $n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q > 0$.

解 因为 $a_n = o^*\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)$,

所以当 $q - p > 1$ 即 $q > p + 1$ 时, 该级数收敛.

$$\text{【2608】 } a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}.$$

解 由

$$a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n},$$

知 $a_n \geq 0, n = 1, 2, \cdots$.

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi,$$

于是 $a_n = o^*\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$,

所以当 $p + 1 > 1$, 即 $p > 0$ 时, 该级数收敛.

$$\text{【2609】 } a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}, (n > 1).$$

解 因为

$$\frac{n-1}{n+1} < 1, (n > 1),$$

于是有 $a_n < 0$,

$$\text{又 } a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^p \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = o^*\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right)$$

于是当 $\frac{p}{2} + 1 > 1$, 即 $p > 0$ 时, 该级数收敛.

$$\text{【2610】 } a_n = \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{n}\right).$$

解 当 $n > 2$ 时, 有 $a_n > 0$.

$$\begin{aligned}\text{又} \quad a_n &= \left(\ln \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\pi}{n}} \right)^p \\ &= \frac{1}{2^p} \ln^p \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{n} \right) \sim \frac{1}{2^p} \tan^{2p} \frac{\pi}{n} \sim \frac{1}{2^p} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{2p},\end{aligned}$$

于是有 $a_n = o^* \left(\frac{1}{n^{2p}} \right)$,

所以当 $2p > 1$, 即 $p > \frac{1}{2}$ 时, 该级数收敛.

$$\text{【2611】} \quad a_n = \log_b^n \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right) \quad (a > 0, b > 0).$$

解 由题意, $b \neq 1$

$$\text{又} \quad a_n = \frac{\ln \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right)}{n \ln b} \sim \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{\sqrt[n]{a}}{n^2} = o^* \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

所以该级数收敛.

$$\text{【2612】} \quad a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p.$$

解 由

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = e^{n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o^* \left(\frac{1}{n^3} \right) \right)} \\ &= e^{1 - \frac{1}{2n} + o^* \left(\frac{1}{n^2} \right)}, \text{ 且 } e > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{于是有} \quad a_n &= \left[e \left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o^* \left(\frac{1}{n^2} \right)} \right) \right]^p \sim e^p \left(\frac{1}{2n} + o^* \left(\frac{1}{n^2} \right) \right)^p \\ &= o^* \left(\frac{1}{n^p} \right).\end{aligned}$$

所以当 $p > 1$ 时, 该级数收敛.

$$\text{【2613】} \quad a_n = \frac{1}{n^{1 + \frac{k}{\ln n}}}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 由} \quad a_n &= n^{-(1 + \frac{k}{\ln n})} = e^{-(1 + \frac{k}{\ln n}) \ln n} \\ &= e^{-(\ln n + k)} = \frac{1}{n} e^{-k},\end{aligned}$$

所以该级数发散.

$$\text{【2614】 } a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$

解 由

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} = o^*\left(\frac{1}{n}\right),$$

有该级数发散.

【2614. 1】 证明扎迈判别法: 若当 $n > n_0$ 时,

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} \geq p > 1.$$

则正号级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geq 0)$ 收敛; 而当 $n > n_0$ 时,

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} \leq 1, \text{ 则该级数发散.}$$

证 由

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} \geq p > 1,$$

$$\text{有 } 0 \leq a_n < \left(1 - \frac{p \ln n}{n}\right)^n,$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \frac{\ln \frac{1}{\left(1 - \frac{p \ln n}{n}\right)^n}}{\ln n} &= \frac{-n \ln \left(1 - \frac{p \ln n}{n}\right)}{\ln n} \\ &= -\frac{n}{\ln n} \left[-\left(\frac{p \ln n}{n} + \frac{p^2 \ln^2 n}{2n^2}\right) + o^*\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right) \right] \\ &= p + \frac{\ln n}{2n} + o^*\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) \geq 1 + \alpha, \end{aligned}$$

当 n 很大时由对数检验法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p \ln n}{n}\right)^n$ 收敛, 于是原级数收敛.

$$\text{又由 } (1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} \leq 1,$$

有 $a_n \geq \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n,$

又
$$n \ln \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = -n \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o^* \left(\frac{\ln^3 n}{n^3} \right) \right)$$

$$= - \left[\ln n + \frac{\ln^2 n}{2n} + o^* \left(\frac{\ln^3 n}{n^2} \right) \right] \rightarrow -\infty,$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$ 发散, 所以原级数发散.

【2615】 证明对数判别法: 若存在 $\alpha > 0$, 使得当 $n \geq n_0$ 时

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha.$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 收敛; 若当 $n \geq n_0$ 时,

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1,$$

则该级数发散.

证 由 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha,$

有 $\frac{1}{a_n} \geq n^{1+\alpha},$

即 $a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$

故该级数收敛.

由 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1,$

有 $\frac{1}{a_n} \leq n,$

即 $a_n \geq \frac{1}{n}.$

故该级数发散.

研究具如下一般项的级数的收敛性(2616 ~ 2618).

【2616】 $a_n = n^{\ln x} \quad (x > 0).$

解 由

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{-\ln x \ln n}{\ln n} = -\ln x,$$

有当 $-\ln x > 1$, 即 $x < \frac{1}{e}$ 时, 该级数收敛.

【2617】 $a_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} \quad (n > 1).$

解 由 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \ln \ln \ln n,$

显然存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 时有 $\ln \ln \ln n \geq p > 1$, 所以该级数收敛.

【2618】 $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}, (n > 1).$

解 由 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n},$

又由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \ln x)^2}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \ln x}{\ln x} = 0,$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n} = 0.$

于是存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, 有

$$\frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n} < 1,$$

所以, 该级数发散.

利用柯西积分判别法, 研究具如下一般项的级数的收敛性(2619 ~ 2620).

【2619】 $a_n = \frac{1}{n \ln^p n} \quad (n > 1).$

解 令 $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x},$

$$\text{由 } f'(x) = -\frac{\ln^p x + p \ln^{p-1} x}{(x \ln^p x)^2},$$

知, $\forall p$, 当 x 充分大时, $f(x)$ 非负递减的.

$$\text{又 } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \begin{cases} \frac{1}{(1-p) \ln^{p-1} x} \Big|_3^{+\infty}, & p \neq 1, \\ \ln \ln x \Big|_3^{+\infty}, & p = 1, \end{cases}$$

故当 $p > 1$ 时, 该级数收敛.

$$\text{【2620】 } a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln \ln n)^q} \quad (n > 2).$$

$$\text{解 令 } f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p (\ln \ln x)^q},$$

$$\text{由 } f'(x) = -\frac{(\ln x)^p (\ln \ln x)^q + p(\ln x)^{p-1} (\ln \ln x)^q + q(\ln x)^{p-1} (\ln \ln x)^{q-1}}{[x(\ln x)^p (\ln \ln x)^q]^2},$$

知, 当 x 充分大时, $f'(x) < 0$, 所以当 x 充分大时, $f(x)$ 非负递减.

下面分情形来讨论.

1° 令 $p = 1$,

$$\text{由 } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^q} = \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(\ln \ln x)^{q-1}} \Big|_3^{+\infty}, & q \neq 1, \\ \ln \ln \ln x \Big|_3^{+\infty}, & q = 1, \end{cases}$$

知, 当 $q > 1$ 时, 该级数收敛, 当 $q \leq 1$ 时, 该级数发散.

2° 令 $p \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{由 } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p (\ln \ln x)^q} &= \int_3^{+\infty} \frac{d \ln x}{(\ln x)^p (\ln \ln x)^q} \\ &\stackrel{\text{令 } t = \ln x}{=} \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}, \end{aligned}$$

当 $p > 1$ 时, 取 $\delta > 0$, 使 $p - \delta > 1$,

$$\text{由 } \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p-\delta} \frac{1}{t^p (\ln t)^q} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^\delta (\ln t)^q} = 0, \quad \forall q \in \mathbb{N},$$

有 $\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}$ 收敛, 故当 $p > 1$ 时, 该级数收敛.

当 $p < 1$ 时, 取 $\varepsilon > 0$, 使 $p + \varepsilon < 1$, 由

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p+\varepsilon} \frac{1}{t^p (\ln t)^q} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\varepsilon}{(\ln t)^q} = +\infty,$$

故当 $p < 1$ 时, 该级数发散.

【2620. 1】 研究以下级数的收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln(n+1)}{\ln(2+p) \cdot \ln(3+p) \cdots \ln(n+1+p)} \quad (p > 0).$$

解 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+2+p)}$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\ln(n+2+p)}{\ln(n+2)} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln(n+2)} \cdot \ln \left(1 + \frac{p}{n+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln(n+2)} \cdot \frac{p}{n+2} = 0. \end{aligned}$$

故由拉阿伯判别法知该级数发散.

【2620. 2】 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^2}$ (其中 $v(n)$ 为 n 的数字数) 的收敛性.

解 由题意假设应是 $|v(n)| \leq c$,

$$\int_1^{\infty} \frac{|v(x)|}{x^2} dx \leq c \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty,$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^2}$ 收敛.

【2620. 3】 设 $\lambda_n (n = 1, 2, \cdots)$ 为方程 $\tan x = x$ 的正根序列, 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$ 的收敛性.

解 因为

$$\tan \lambda_n = \lambda_n, \lambda_n > 0, n = 1, 2, \cdots, \lambda_{n+1} > \lambda_n.$$

所以考察 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$ 的收敛性只要考察 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 收敛性,

又 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 收敛, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$ 收敛.

【2621】 研究级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ 的收敛性.

解 因为 $\ln(n!) = \sum_{i=1}^n \ln i < n \ln n$,

于是有 $\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n \ln n} > 0$,

由 2619 知, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散, 故 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ 发散.

【2622】 证明: 各项单调递减的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时收敛或发散.

证 因为 $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$,

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性与部分和的有界性等价.

令 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$,

$t_k = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k}$.

当 $n < 2^k$ 时,

$$\begin{aligned} S_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k} = t_k, \end{aligned}$$

于是有 $S_n \leq t_k$, ($n < 2^k$ 时),

当 $n > 2^k$ 时

$$\begin{aligned} S_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k, \end{aligned}$$

于是有 $2S_n \geq t_k$, ($n > 2^k$ 时),

综上所述 $\{S_n\}$ 与 $\{t_k\}$ 同时有界或同时无界.

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时收敛或同时发散.

【2623】 设 $f(x)$ 为单调递减正值函数. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛, 则对于它的余项:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k),$$

有如下估计:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx.$$

利用此式, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和, 精确度到 0.01.

证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛, 由柯西积分判别法知 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 于是由 $f(x)$ 递减性有

$$f(n+i+1) \leq \int_{n+i}^{n+i+1} f(x) dx \leq f(n+i),$$

$$(i = 1, 2, \dots).$$

故有 $\sum_{i=1}^{\infty} f(n+i+1) \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(n+i)$

于是有 $R_n - f(n+1) \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq R_n,$

即 $\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq R_n \leq f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx.$

令 $f(x) = \frac{1}{x^2},$

$$\begin{aligned} \text{由 } R_n &\leq f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{可令 } \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leq 0.001,$$

$$\text{有 } n \geq 4 + 2\sqrt{6} \approx 4.9.$$

故当 $n = 5$ 时, 可取 $\sum_{n=1}^5 \frac{1}{n^2} \approx 1.46$ 作为级数的近似值且满足精确要求.

【2624】 证明叶尔马科夫判别法: 设 $f(x)$ 为单调递减正值函数, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda,$$

若 $\lambda < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛;

若 $\lambda > 1$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 而发散.

$$\text{证 由 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda,$$

有任意 $\epsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 当 $x > M$ 时 $\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} < \lambda + \epsilon$ 成立.

1° 若 $\lambda < 1$, 取 ϵ 使得 $\lambda + \epsilon = \gamma < 1$, 于是有

$$e^x f(e^x) < \gamma f(x),$$

当 $n > M$ 时, 我们有

$$\int_M^n e^x f(e^x) dx < \gamma \int_M^n f(x) dx,$$

$$\text{进一步有 } \int_{e^M}^{e^n} f(x) dx < \gamma \int_M^n f(x) dx,$$

$$\begin{aligned} \text{于是有 } (1 - \gamma) \int_{e^M}^{e^n} f(x) dx &< \gamma \left(\int_M^n f(x) dx - \int_{e^M}^{e^n} f(x) dx \right) \\ &= \gamma \left(\int_M^{e^M} f(x) dx - \int_n^{e^n} f(x) dx \right), \end{aligned}$$

$$\text{从而有 } \int_{e^M}^{e^n} f(x) dx < \frac{\gamma}{1 - \gamma} \int_M^{e^M} f(x) dx.$$

现固定 M , 令 $n \rightarrow +\infty$, 有

$$\int_{e^M}^{+\infty} f(x) dx \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} \int_M^{e^M} f(x) dx = \text{常数}.$$

由柯西积分判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

2° 若当 $\lambda > 1$ 时

由 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda$, 有任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $x > N$ 时

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} > \lambda - \epsilon \text{ 成立.}$$

现取 ϵ , 使得 $\lambda - \epsilon > 1$, 于是有

$$e^x f(e^x) > f(x) \quad (x > N).$$

从而当 $n > N$ 时, 有

$$\int_N^n e^x f(e^x) dx > \int_N^n f(x) dx,$$

$$\text{也就是 } \int_{e^N}^{e^n} f(x) dx > \int_N^n f(x) dx,$$

$$\text{于是有 } \int_{e^N}^n f(x) dx + \int_n^{e^n} f(x) dx > \int_N^{e^N} f(x) dx + \int_{e^N}^n f(x) dx,$$

$$\text{即 } \int_n^{e^n} f(x) dx > \int_N^{e^N} f(x) dx \quad (n > N).$$

N 固定, 现令 $e_0 = N+1, e_1 = e^{e_0}, e_2 = e^{e_1}, \dots, e_{k+1} = e^{e_k}, \dots, m = e_0, e_1, e_2, \dots$, 于是有

$$\int_{e_0}^{e_1} f(x) dx > \int_N^{e^N} f(x) dx,$$

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x) dx > \int_N^{e^N} f(x) dx,$$

$\dots,$

$$\int_{e_k}^{e_{k+1}} f(x) dx > \int_N^{e^N} f(x) dx,$$

$\dots,$

$$\text{从而 } \int_{e_0}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \int_{e_{k-1}}^{e_k} f(x) dx$$

$$\geq \lim_{m \rightarrow \infty} m \int_N^{e^N} f(x) dx = +\infty,$$

于是根据柯西积分判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

【2625】 证明罗巴楔夫斯基判别法:一般项单调趋于零的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 同时收敛或发散.

其中 p_m 为 a_n 的满足不等式:

$$a_n \geq 2^{-m} (n = 1, 2, \dots, p_m).$$

证 因为 p_m 是满足不等式 $a_n \geq 2^{-m}$ 的项 a_n 的最大指标,于是有

$$2^{-m} \leq a_{p_{m-1}+1} < 2^{-m+1}, 2^{-m} \leq a_{p_{m-1}+2} < 2^{-m+1},$$

$$2^{-m} \leq a_{p_m} < 2^{-m+1}, a_{p_m+1} < 2^{-m},$$

$$\begin{aligned} \text{从而} \quad (p_m - p_{m-1})2^{-m+1} &> a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} + \dots + a_{p_m} \\ &\geq (p_m - p_{m-1})2^{-m}, \end{aligned}$$

关于 m 求和得

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1})2^{-m} &\leq \sum_{m=1}^N (a_{p_{m-1}+1} + \dots + a_{p_m}) \\ &< \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1})2^{-m+1}, \end{aligned}$$

于是我们有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1})2^{-m+1}$ 具有相同的敛散性.

下面证明 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1})2^{-m+1}$ 与 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 有相同的敛散性.

$$\text{因为 } (p_m - p_{m-1})2^{-m+1} < 2p_m 2^{-m},$$

所以由 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 收敛可得 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1})2^{-m+1}$ 收敛.

现来证明 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1})2^{-m+1}$ 收敛可推得 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 收敛.

令

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) 2^{-m+1},$$

因为 $p_m - p_{m-1} \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots)$,

$$\begin{aligned} \text{于是有 } A &\geq \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) 2^{-m+1} \\ &= \sum_{m=1}^N p_m 2^{-m+1} - \sum_{m=1}^N p_{m-1} 2^{-m+1} \\ &= \sum_{m=1}^N p_m \cdot 2^{-m+1} - \sum_{m=0}^{N-1} p_m 2^{-m} \\ &= p_N 2^{-N+1} + \sum_{m=1}^{N-1} p_m \left(\frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^m} \right) - p_0 \\ &= \sum_{m=1}^{N-1} p_m 2^{-m} + p_N 2^{-N+1} - p_0. \end{aligned}$$

$$\text{现设 } S_{N-1} = \sum_{m=1}^{N-1} p_m 2^{-m},$$

于是我们有 $S_{N-1} \leq A + p_0 - p_N 2^{-N} \leq A + p_0$,

由单调有界原理知 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ 存在.

所以 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 收敛.

研究下列级数的收敛性(2626 ~ 2645).

$$\text{【2626】 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}.$$

解 因为

$$\frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^{\alpha}} = \frac{4}{n^{\alpha}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})} > 0,$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n^{\alpha}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})}}{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}} = 2,$$

当 $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ 收敛, 于是当 $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ 时, 级

数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^a}$ 收敛.

【2627】 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}).$

解 由

$$\begin{aligned} & \sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b} \\ &= \frac{(\sqrt{n+a})^4 - (\sqrt[4]{n^2+n+b})^4}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(\sqrt{n+a})^2 + (\sqrt[4]{n^2+n+b})^2} \\ &= \frac{(2a-1)n + a^2 - b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a + \sqrt{n^2+n+b})}. \end{aligned}$$

有当 n 充分大时, 通项保持定号, 于是不妨假设定原级数为正项级数.

下面分两种情况来讨论:

1° $a = \frac{1}{2}$. 因

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^2 - b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a + \sqrt{n^2+n+b})}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} \\ &= \frac{a^2 - b}{4}, \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数收敛.

2° $a \neq \frac{1}{2}$. 因

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2a-1)n + a^2 - b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a + \sqrt{n^2+n+b})}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{2a-1}{4} \neq 0, \end{aligned}$$

所以原级数发散.

$$\text{【2628】 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cot \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right).$$

解 因为

$$\begin{aligned} & \cot \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \\ &= \left(\cot \frac{n\pi}{4n-2} - 1 \right) + \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right), \end{aligned}$$

于是考虑如下两级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cot \frac{n\pi}{4n-2} \right),$$

和
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right).$$

它们皆为正项级数. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cot \frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{32},$$

有 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cot \frac{n\pi}{4n-2} \right)$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right)$ 收敛.

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cot \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right)$ 发散.

$$\text{【2629】 } \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right].$$

解 由不等式

$$\ln(1+x) < x, (x > -1, x \neq 0),$$

有
$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n},$$

$$\ln \frac{n+1}{n} = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1},$$

故 $\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$

从而
$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}} \\ &< \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}} < \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right)$ 收敛.

【2630】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}.$

解 就 α 的两种情形加以讨论

1° $\alpha \leq 2$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$, 由 139 题知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} = +\infty.$$

于是
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} = +\infty.$$

由 $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ 发散, 于是我们有当 $\alpha \leq 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$ 发散.

2° $\alpha > 2$, 由斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1),$$

有
$$\frac{\ln(n!)}{n^\alpha} = \frac{\ln 2\pi}{2n^\alpha} + \frac{\ln n}{2n^\alpha} + \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} + \frac{\theta_n}{12n^{\alpha+1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}},$$

因为当 $\alpha > 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{n^{\alpha+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ 皆收敛. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$ 收敛.

【2631】 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[n]{n}}.$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$,

所以存在 n_0 , 当 $x \geq n_0$ 时, 有 $e^x > 2x^4$, 于是当 $n > n_0^3$ 时, 有 $e^{\sqrt[n]{n}} < 2n^{\frac{4}{3}}$, 故

$$e^{-\sqrt[n]{n}} < \frac{1}{2} n^{-\frac{4}{3}},$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[n]{n}}$ 收敛.

【2632】 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^8}{e^x} = 0$

所以存在 n_0 , 当 $x \geq n_0$ 时有 $e^x > x^8$
从而当 $n > n_0^2$ 时, 有

$$e^{\sqrt{n}} > (\sqrt{n})^8 = n^4,$$

于是 $n^2 e^{-\sqrt{n}} < n^2 \cdot n^{-4} = n^{-2}.$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$ 收敛.

【2633】 $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1).$

解 因 $\frac{1}{n^{\frac{1}{n^2+1}}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2+1} \sim \frac{\ln n}{n^2},$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ 收敛.

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$ 收敛.

【2634】 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}.$

解 1° 若 $c \neq 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \ln n + b}{c \ln n + d} = \frac{a}{c},$$

所以 $a \neq 0$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \ln n + b}{c \ln n + d} = \frac{a}{c} \neq 0.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}$ 发散.

当 $a = 0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{c \ln n + d}$, 当 $b = 0$ 时, 级数显然收敛,

当 $b \neq 0$, 且 b 与 c 同号时, n 充分大时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{c \ln n + d}$ 为正项级

数, 当 $b \neq 0$, 且 b 与 c 异号时, n 充分大时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{c \ln n + d}$ 为负

项级数, 于是不妨设 $bc \neq 0$ 且 $b > 0, c > 0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{c \ln n + d}$

为正项级数, 因为 n 充分大时 $\frac{b}{c \ln n + d} > \frac{b}{cn + d}$, 所以当 $bc \neq 0$ 时,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{c \ln n + d}$ 发散.

2° 当 $c = 0$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \ln n + b}{d},$

显然只有当 $a = 0, d \neq 0$ 时, 级数收敛, 故综上所述, 当 $a \cdot c \neq 0$ 时, 级数发散, 当 $a \cdot c = 0$ 且 $a = 0$ 时级数收敛, 当 $c \neq 0$, 且 $bc \neq 0$ 时, 级数发散, 当 $c \neq 0, b = 0$ 时, 级数收敛.

【2635】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}.$$

解 因为

$$\frac{\frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}} = \left(\frac{\ln \sin \frac{1}{n}}{\ln \frac{1}{n}} \right)^2,$$

而
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

所以
$$\frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)} \sim \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}} = \frac{1}{\ln^2 n},$$

于是原级数的敛散性等价于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 的敛散性.

由
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0,$$

于是存在 $M > 0$, 当 $x > M$ 时, 有 $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} < 1$, 即

$$\ln^2 x < x.$$

所以存在 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$\ln^2 n < n,$$

故
$$\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n} \quad (n > N).$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散, 也就是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}$ 发散.

【2636】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}.$

解 (1) 若 $a = 0$ 时, 该级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, 发散.

(2) 若 $a \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2} = e^{n^2 \ln \cos \frac{a}{n}} = e^{n^2 \ln \left(1 - \frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)} \\ &= e^{n^2 \left(-\frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)} = e^{-\frac{a^2}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1$.

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2}$ 在 $a \neq 0$ 时收敛.

【2637】 $\sum_{n=3}^{\infty} \ln \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right].$

解 由

$$\begin{aligned} a_n &= \ln \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right] \\ &= \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}}, \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} = 1,$

于是由于 $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$

有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \operatorname{sh} \pi x + \pi \sin \pi x}{2x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^2 \operatorname{ch} \pi x + \pi^2 \cos \pi x}{2} = \pi^2.$$

$$\begin{aligned} \text{从而有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} \\ &\quad \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}} \\ &= \pi^2. \end{aligned}$$

于是存在 $M > 0, N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} \right| < M,$$

即 $|a_n| < M \frac{1}{n^2}.$

所以原级数收敛.

【2638】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}.$

解 由 Stirling 公式

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}} = 1,$$

有存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} > \frac{1}{2},$$

即 $n! > \frac{\sqrt{2\pi n}}{2} \left(\frac{n}{e}\right)^n > \left(\frac{n}{e}\right)^n,$

于是 $\frac{n!}{n\sqrt{n}} > \frac{1}{e^n} n^{n-\frac{3}{2}},$

令 $C_n = \frac{1}{e^n} n^{n-\frac{3}{2}},$

有 $\sqrt[n]{C_n} = \frac{1}{e} n^{1-\frac{3}{2n}},$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n} = +\infty,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 发散. 于是原级数发散.

【2639】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$

解 因为

$$a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \frac{e^{(\ln n)^2}}{e^{n \ln(\ln n)}} = e^{-[n \ln(\ln n) - \ln^2 n]}.$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(\ln n) - \ln^2 n}{n} = +\infty,$

知存在 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$n \ln(\ln n) - \ln^2 n \geq Mn,$$

其中 M 为大于零的常数, 于是有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{e^{n \ln(\ln n) - \ln^2 n}} \leq \frac{n^2}{e^{Mn}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

从而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 收敛.

【2640】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2} \right) \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$

解 由

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2} \left(\frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{c^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right) \right] \\ &= \ln a - \frac{1}{2}(\ln b + \ln c) = \ln \frac{a}{\sqrt{bc}}, \end{aligned}$$

若 $a \neq \sqrt{bc}$ 时, 有

$$\ln \frac{a}{\sqrt{bc}} \neq 0,$$

于是 n 很大时, 原级数的项不变号. 故当 $a \neq \sqrt{bc}$ 时, 有原级数发散.

若 $a = \sqrt{bc}$, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2}(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2 \right]$,

$$\begin{aligned} \text{又由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}}{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}}}{\frac{1}{n}} \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{b^{\frac{1}{2n}} - 1}{\frac{1}{n}} - \frac{c^{\frac{1}{2n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln b - \frac{1}{2} \ln c \right)^2 = \frac{1}{8} (\ln b - \ln c)^2, \end{aligned}$$

所以当 $a = \sqrt{bc}$ 时, 原级数收敛.

【2641】 $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^a} - 1).$

解 若 $a \geq 0$, $n^{n^a} - 1 \rightarrow +\infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时).

所以该级数发散.

若 $-1 \leq \alpha < 0$, 由

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha - 1}{\frac{1}{x^{|\alpha|}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{|\alpha|}} - 1}{\frac{1}{x^{|\alpha|}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{|\alpha|}} \left(\frac{1}{x^{|\alpha|+1}} - |\alpha| \cdot \frac{\ln x}{x^{|\alpha|+1}} \right)}{-|\alpha| \cdot \frac{1}{x^{|\alpha|+1}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{|\alpha|}} \left[-\frac{1}{|\alpha|} (1 - |\alpha| \ln x) \right] \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

于是我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{|\alpha|}}} = +\infty$.

从而存在 $M > 0, N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$a_n > M \frac{1}{n^{|\alpha|}},$$

由 $-1 \leq \alpha < 0$ 知, 原级数发散.

若 $\alpha < -1$, 取 β , 使 $\alpha < \beta < -1$, 于是 $|\alpha| > |\beta| > 1$, 由

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha - 1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{|\alpha|}} - 1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{|\alpha|}} \left(\frac{1}{x^{|\alpha|+1}} - |\alpha| \cdot \frac{\ln x}{x^{|\alpha|+1}} \right)}{-|\beta| \cdot \frac{1}{x^{|\beta|+1}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{|\alpha|}} \left(\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \frac{\ln x}{x^{|\alpha|-|\beta|}} - \frac{1}{|\beta|} \cdot \frac{1}{x^{|\alpha|-|\beta|}} \right) = 0, \end{aligned}$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{|\beta|}}} = 0$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|\beta|}}$ 收敛. 故当 $\alpha < -1$ 时, 原级数收敛.

$$\text{【2642】} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^2} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^2} \right) \right].$$

解 设

$$a_n = \ln \frac{1}{n^\alpha} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^\alpha} \right),$$

由题意有 $\alpha \geq 0$.

(1) 当 $\alpha = 0$ 时, $a_n = -\ln \sin 1 > 0$, 该级数发散.

(2) 当 $\alpha > 0$ 时

$$\begin{aligned} a_n &= \ln \left[\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sin \frac{1}{n^\alpha}} \right] = \ln \left[1 + \left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sin \frac{1}{n^\alpha}} - 1 \right) \right] \\ &= \left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sin \frac{1}{n^\alpha}} - 1 \right) \ln \left[1 + \left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sin \frac{1}{n^\alpha}} - 1 \right) \right]^{\frac{\sin \frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha} - \sin \frac{1}{n^\alpha}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^\alpha}{\sin x^\alpha} - 1}{x^{2\alpha}} &\stackrel{t=x^\alpha}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{\sin t} - 1}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^2 \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} \\ &= \frac{1}{6}, (\text{因 } \sin t \sim t, \text{ 当 } t \rightarrow 0 \text{ 时}) \end{aligned}$$

于是
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \frac{1}{6},$$

故当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^\alpha} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^\alpha} \right) \right]$ 收敛.

当 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^\alpha} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^\alpha} \right) \right]$ 发散.

【2643】
$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)} \quad (a > 0).$$

解 设 $a_n = a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)}$,

当 $a = 1$ 时, $a_n = 1$, 于是该级数发散.

当 $a \neq 1$ 时, 因为

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = (b + c \ln n) \ln a,$$

由对数判别法(2615 的结论) 有

① 当 $c = 0, b \ln a > 1$, 即 $a^b > e$ 时, 原级数收敛.

当 $c = 0, b \ln a \leq 1$, 即 $a^b \leq e$ 时, 原级数发散.

② 当 $c \neq 0, c \ln a > 0$, 即 $a^c > 1$ 时, 原级数收敛.

当 $c \neq 0, c \ln a < 0$, 即 $a^c < 1$ 时, 原级数发散.

【2644】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} \quad (a > 0, b > 0).$

解 设

$$a_n = \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}},$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{a+b}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a+b} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n+a+b}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+b} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^{n+a}} = \frac{1}{e^a \cdot e^b} = e^{-(a+b)}, \end{aligned}$$

当 $a+b > 1$ 时, 原级数收敛, 当 $a+b \leq 1$ 时, 原级数发散.

【2645】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!}.$

解 设

$$a_n = \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!},$$

$$\text{因为 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^n}{(2n+2)!},$$

$$\text{而 } \frac{(n+2)^n}{(2n+2)!} < \frac{(n+2)^n}{(n+3) \cdots (2n+2)} < \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n,$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^{n+3-3} = \frac{1}{e} < 1,$$

$$\therefore \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

由 2592 结论知原级数收敛.

研究以下带有一般项的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性 (2646 ~ 2652).

【2646】 $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}.$

解 因为

$$0 < u_n \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x} dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} dx = n^{-\frac{3}{2}},$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【2647】 $u_n = \frac{1}{\int_b^n \sqrt[4]{1+x^4} dx}.$

解 因为

$$\begin{aligned} 0 < u_n &= \frac{1}{\int_b^n \sqrt[4]{1+x^2} dx} \\ &= \frac{1}{\int_b^0 \sqrt[4]{1+x^2} dx + \int_0^n \sqrt[4]{1+x^2} dx}, \end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^2} dx}$ 敛散性相同.

又
$$\frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^2} dx} < \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{x^2} dx} = \frac{2}{3n^{\frac{3}{2}}},$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【2648】 $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$

解 因为

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x dx$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} > 0,$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

【2649】 $u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx.$

解 因为

$$0 < u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx \leq \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{n}} dx = e^{-\sqrt{n}},$$

又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{e^{\sqrt{n}}} = 0,$

于是我们有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【2650】 $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx.$

解 令 $f(x) = \sin^3 x,$

由于 $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x,$

在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内大于零, 于是 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{n})$ ($n \geq 2$) 内单调增加, 由此我们有, 当 $n \geq 2$ 时,

$$0 \leq u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^3 x dx$$

$$\leq \sin^3 \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n} \leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^4.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ 收敛, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【2651】 $u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}.$

解 由

$$\begin{aligned}
 0 < u_n &= \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!} \\
 &\leq \frac{n \cdot n!}{n!(n+1)\cdots(2n)} = \frac{n}{(n+1)\cdots(2n)} \\
 &< \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n},
 \end{aligned}$$

知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$\text{【2652】 } u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \ln^2 k}{n^\alpha}.$$

解 因为

$$0 < u_n \leq \frac{n \ln^2 n}{n^\alpha} = \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}},$$

于是我们可考察 $\alpha > 2$ 时的情形, 由 $\alpha > 2$, 我们有 $\delta > 0$, 使得 $\alpha - 1 - \delta > 1$, 从而有

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}} = \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1-\delta}},$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{n^\delta} = 0,$$

知, 存在 $M > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}} \leq \frac{M}{n^{\alpha-1-\delta}},$$

故当 $\alpha > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

下面考察 $\alpha \leq 2$ 时情形, 当 n 充分大时, 有

$$u_n \geq \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n^2} = \frac{\ln n!}{n^2},$$

由 Stirling 公式, $\exists n_0 > 0$, 当 $n > n_0$ 时有

$$n! > \frac{1}{2} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

于是

$$\begin{aligned} u_n &\geq \frac{\ln\left[\frac{1}{2} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right]}{n^2} \\ &= \frac{\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\ln(2\pi) + \ln n] + n \ln \frac{n}{e}}{n^2} \\ &> \frac{\ln \frac{n}{e}}{n} > \frac{1}{n} > 0, \quad (\text{当 } n \text{ 充分大时}). \end{aligned}$$

故当 $\alpha \leq 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

用相应的级数代替序列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$, 研究它们的收敛性, 若(2653 ~ 2655).

【2653】 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$

解 由

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right), \end{aligned}$$

令 $x_0 = 0$, 有 $x_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}),$

又由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 即 $\{x_n\}$ 收敛.

【2654】 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}.$

解 由

$$\begin{aligned}
x_n - x_{n-1} &= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \{ (\ln n)^2 - [\ln(n-1)]^2 \} \\
&= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \ln \frac{n}{n-1} \cdot \ln(n(n-1)) \\
&= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) \left(\ln n^2 + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) \\
&= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left(2 \ln n - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\
&= \frac{\ln n}{n} - \left\{ \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \right\} = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

因为 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 收敛, 故 $x_n = \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1})$ 收敛.

【2655】 若

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)!}; (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}.$$

大约需要取级数多少项作为它的和才能精确到 10^{-5} .

解 (1) 余项

$$\begin{aligned}
R_N &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{N}.
\end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{1}{N} < 10^{-5},$$

有 $N > 10^5$.

故大约取 $10^5 + 1$ 项即可达到要求.

(2) 余项

$$\begin{aligned}
R_N &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)!} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2n}{(n-1)n^2} \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{(n-1)n} = \frac{2}{N},
\end{aligned}$$

令 $\frac{2}{N} < 10^{-5}$, 有 $N > 2 \times 10^5$, 故大约取 $2 \times 10^5 + 1$ 项, 其精

度满足 10^{-5} .

$$(3) \text{ 余项 } R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!},$$

由 Stirling 公式有

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k, (k = 1, 2, \dots).$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } R_N &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{e}{2n-1}\right)^{2n-1} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2n-1} \\ &= \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2s}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } N \geq 1 \text{ 时, } \frac{e}{2N+1} < 1,$$

$$\text{于是 } R_N < \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{e}{2N+1}\right)^2},$$

经计算, 令 $N = 5$ 时

$$R_N < \left(\frac{e}{11}\right)^{11} \cdot \frac{121}{113.614} \approx 10^{-6.64} < 10^{-5}.$$

故级数取 5 项就能保证要求.

§ 2. 交错级数收敛性的判别法

1. 级数的绝对收敛性

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{①}$$

称为绝对收敛的, 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{②}$$

收敛此时级数 ① 也收敛. 绝对收敛级数的和与项相加的次序无关.

要确定级数 ① 的绝对收敛, 将同号级数收敛性的已知判别法用于级数 ② 就够了.

若级数①收敛,而级数②发散,则级数①称为条件(非绝对)收敛.通过重新排列级数各项顺序可以使条件收敛级数的和等于任意数(黎曼定理).

2. 莱布尼茨判别法 若(1) $b_n \geq b_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ 及 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 则交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^{n-1} b_n + \dots (b_n \geq 0),$$

收敛(一般来说非绝对),在这种情况下,对于级数余项:

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \dots,$$

有如下估计

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leq \theta_n \leq 1).$$

3. 阿贝尔判别法

若(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (2) 数 $b_n (n = 1, 2, \dots)$ 形成单调有界序列, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \tag{3}$$

收敛.

4. 狄利克雷判别法 若: (1) 部分和 $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 有界; (2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, b_n 单调地趋向于零, 则级数③收敛.

【2656】 证明: 非绝对收敛级数的各项可以不重新排列而分群组合, 使所得出的新级数是绝对收敛的.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛, 由柯西定理知给 $\epsilon_1 = \frac{1}{3}$, 存在 $N_1 > 0$, 对任意自然数 m_1 , 有

$$|a_{N_1+1} + \dots + a_{N_1+m_1}| < \epsilon_1,$$

给定 $\epsilon_2 = \frac{1}{3^2}$, $\exists N_2 > N_1$, 使对任意自然数 m_2 , 有

$$|a_{N_2+1} + \dots + a_{N_2+m_2}| < \epsilon_2,$$

...

给定 $\varepsilon_k = \frac{1}{3^k}$, $\exists N_k > N_{k-1}$, 使对任意自然数 m_k 有

$$|a_{N_k+1} + \cdots + a_{N_k+m_k}| < \varepsilon_k,$$

\cdots ,

现取 $A_0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}$,

$$A_1 = a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \cdots + a_{N_2},$$

\cdots ,

$$A_k = a_{N_k+1} + \cdots + a_{N_{k+1}},$$

\cdots ,

则有 $|A_k| < \varepsilon_k = \frac{1}{3^k} \quad (k = 1, 2, \cdots)$,

且 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 是原级数的各项不变更其顺序而分群组合起来所得的新

级数, 因为 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ 收敛, 于是 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 绝对收敛.

【2657】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足下列条件: (1) 当 $n \rightarrow \infty$

时, 级数的一般项 a_n 趋向于零; (2) 不变更级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 原有的次序

而重新组合所得出的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 是收敛的; (3) 在

$$A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \quad (1 = p_1 < p_2 < \cdots),$$

中 a_i 的项数有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 是收敛的.

证 设 A_n 中相加项的数目不超过某一固定的自然数 m , 即

$$p_{n+1} - p_n \leq m \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

任意 $\varepsilon > 0$, 令 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2m+1}$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 于是存在 M , 当 n

$\geq M$ 时, 有 $|a_n| < \varepsilon_1$;

又由 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的收敛性知, 存在 $N_1 > M$, 当 $n > N_1$ 及任意自然数 p 有

$$|A_n + A_{n+1} + \cdots + A_{n+p}| < \varepsilon_1,$$

现取 $N = p_{N_1}$, 当 $n \geq N$ 时, 任意自然数 S , 令

$$\Lambda_{n,s} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+s},$$

由题意 a_i 必是某一个 A_k 中的项, 令

$$\begin{aligned} S_{A_n} &= \left\{ a_i \mid A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \right\} \\ &= \{A_n \text{ 中各项 } a_i \text{ 的全体}\}, \end{aligned}$$

于是当 $i < j$ 时, 若 $a_i \in S_{A_k}, a_j \in S_{A_l}$, 则有 $k \leq l$,

现考察 $\Lambda_{n,s}$ 中各项, 首先

$$a_n \in S_{A_{N_1+r}} \quad (r \geq 0),$$

其次 $\Lambda_{n,s} = a_n + \cdots + a_{p_{N_1+r+1}-1} + A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q} + a_{p_{N_1+r+q+1}} + \cdots + a_{n+s},$

$$\text{令 } B = a_n + \cdots + a_{p_{N_1+r+1}-1},$$

$$B' = a_{p_{N_1+r+q+1}} + \cdots + a_{n+s},$$

显然 B 是 A_{N_1+r} 中一部分项之和, B' 是 $A_{N_1+r+q+1}$ 中一部分项之和, 从而

$$|B| \leq (p_{N_1+r+1} - p_{N_1+r})\varepsilon_1 \leq m\varepsilon_1,$$

$$|B'| \leq (p_{N_1+r+q+2} - p_{N_1+r+q+1})\varepsilon_1 \leq m\varepsilon_1,$$

$$|A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q}| < \varepsilon_1,$$

于是当 $n \geq N, s$ 为任意自然数有

$$\begin{aligned} |\Lambda_{n,s}| &\leq |B| + |A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q}| + |B'| \\ &< (2m+1)\varepsilon_1 = \varepsilon, \end{aligned}$$

故由柯西收敛准则知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

【2658】 证明: 若将收敛级数的各项重新排列, 使得其中每一项都离开其原位超过 m 个位置 (这里 m 为预先给定的数), 则这

个级数的和不变.

证 设原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 重排后的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

令 $S_N = \sum_{n=1}^N a_n, \sigma_N = \sum_{n=1}^N b_n$,

由题意有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S.$$

现证 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = S$,

我们规定 $\Lambda_N = \sigma_N - S_N$, 任给 $\epsilon > 0$, 取 $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2m} > 0$, 则存在 $M > 0$, 当 $n \geq M$ 时, 有 $|a_n| < \epsilon_1$, 现取 $N \geq M + 2m$, 又我们定义 S_k 内各 a_n 项元素组成的集合为 \tilde{S}_k , σ_k 内各 b_n 项元素组成的集合为 $\tilde{\sigma}_k$, 于是有

$$\Lambda_N = \sum_{b_n \in \tilde{\sigma}_N} b_n - \sum_{a_n \in \tilde{S}_N} a_n,$$

现看 a_1, a_2, \dots, a_N 各项, 我们知道每一个 a_i 被重排成 b_j 时, i 与 j 的标号差不超过 m . 因此, 对每一个 a_i 总可以在 b_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $b_j = a_i$, 反之, 看 b_1, b_2, \dots, b_N 各项, 对每一个 b_j 总可以在 a_j 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $a_i = b_j$, 但有这样的情形: 最后一段不超过 m 个元素的 a_i , 即 $a_{N-m}, a_{N-m+1}, \dots, a_N$ 内若干个元素可能被迁到 b_N 之后, 从而在 $\tilde{\sigma}_N$ 内找不到对应的搬迁元素, 但个数不超过 m , 同样在最后一段不超过 m 个元素的 b_j , 即 $b_{N-m}, b_{N-m+1}, \dots, b_N$ 之内若干个元素在 \tilde{S}_N 内找不到搬迁元素, 但个数不超过 m , 于是

$$\begin{aligned} |\Lambda_N| &= \left| \sum_{\substack{b_n \in \tilde{\sigma}_N \\ b_n \notin \tilde{S}_N}} b_n - \sum_{\substack{a_n \in \tilde{S}_N \\ a_n \notin \tilde{\sigma}_N}} a_n \right| \leq \sum_{\substack{b_n \in \tilde{\sigma}_N \\ b_n \notin \tilde{S}_N}} |b_n| + \sum_{\substack{a_n \in \tilde{S}_N \\ a_n \notin \tilde{\sigma}_N}} |a_n| \\ &< m\epsilon_1 + m\epsilon_1 = \epsilon, \end{aligned}$$

其中上式中 a_n 的下标 $n \geq M + m > M$, 同样 b_n 的下标 $n \geq M +$

m . 由 b_n 是由某个 a_i 搬迁而来, i 在 n 的前后距离不超过 m , 于是 $i \geq M$, 故 $|b_n| = |a_i| < \epsilon_i$, 于是上述不等式成立, 所以 $\lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_N = 0$, 于是有 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$.

证明下列级数的收敛性并求出它们的和(2659 ~ 2661).

【2659】 $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$

证 因为

$$S_n = 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{2n-3}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^n},$$

将上述两式相加有

$$\frac{3}{2} S_n = 1 - \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{2}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^n},$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} 3S_n &= \frac{2}{2} - \frac{2}{2^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2}{2^{n-2}} + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{9}$, 故原级数收敛, 其和为 $\frac{2}{9}$.

【2660】 $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$

证 易知该级数绝对收敛, 从而该级数收敛, 令该和为 S

$$\begin{aligned} \text{由 } S_{3n} &= \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{3n-3}}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{3n-2}}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{3n-1}}\right) \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} \end{aligned}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}},$$

有 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{10}{7}.$

【2661】 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots.$

提示:运用公式

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + e_n$$

(这里 C 为欧拉常数和 $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$).

证 由交错级数判别法知该级数收敛,设其和为 S ,

$$\begin{aligned} \text{由 } S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= C + \ln 2n + e_{2n} - (C + \ln n + e_n) \\ &= \ln 2 + e_{2n} - e_n, \end{aligned}$$

有 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln 2.$

【2662】 已知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2,$$

求出由于其各项重新排列的结果得出的级数的和:

(1) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$

和 (2) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots.$

解 (1) 由

$$S_{3n} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \\
& = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1}\right) \\
& \quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
& = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n}\right) \\
& \quad - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
& \quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right),
\end{aligned}$$

又令 $\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$,

$$l_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n},$$

于是有 $l_{2n} = \sigma_{2n} - \sigma_n$, $l_{4n} = \sigma_{4n} - \sigma_{2n}$,

$$\begin{aligned}
\text{我们得到 } S_{3n} &= \sigma_{4n} - \frac{1}{2}\sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n \\
&= (\sigma_{4n} - \sigma_{2n}) + \frac{1}{2}(\sigma_{2n} - \sigma_n) = l_{4n} + \frac{1}{2}l_{2n},
\end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} l_{4n} + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} l_{2n} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2$.

又由 2658 题知该级数收敛, 故该级数的和为 $\frac{3}{2} \ln 2$.

$$\begin{aligned}
(2) \text{ 由 } S_{3n} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots \\
& \quad + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) \\
 & = \sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n - \frac{1}{2}\sigma_{2n} = \frac{1}{2}(\sigma_{2n} - \sigma_n) = \frac{1}{2}l_{2n},
 \end{aligned}$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{1}{2} \ln 2$.

又由 2658 题知该级数收敛, 故该级数的和为 $\frac{1}{2} \ln 2$.

【2663】 收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 的各项经重新排列后, 使其

成为发散级数.

解 级数重排如下

$$\begin{aligned}
 (*) & 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \\
 & + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots,
 \end{aligned}$$

对(*)级数每相邻三项加括号后得一新级数(**)

$$\begin{aligned}
 (**) & \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) \\
 & + \left(\frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \cdots \\
 & + \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + \cdots,
 \end{aligned}$$

其通项为 $\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

$$\begin{aligned}
 \text{因为} \quad & \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{2}{\sqrt{4n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \\
 & = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} > 0,
 \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$ 发散.

所以级数(*)发散.

研究下列交错级数的收敛性(2664 ~ 2673).

$$\text{【2664】} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}.$$

解 因为

$$\left| \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故该级数绝对收敛, 所以该级数收敛.

$$\text{【2665】} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n.$$

解 由

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n,$$

$$\text{有} \quad |a_n| = \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n,$$

$$\text{又} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+100}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1,$$

所以该级数绝对收敛, 故该级数收敛.

$$\text{【2666】} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

解 对该级数相邻三项加括号后得级数

$$\begin{aligned} (*) & \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) \\ & + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \right) + \dots, \end{aligned}$$

显然级数(*)是交错级数且满足莱布尼兹条件, 故(*)收敛, 由2657的结论, 知原级数收敛.

【2666. 1】 设

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \tag{①}$$

其中 $b_n > 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $b_n \rightarrow 0$, 由此能得出级数 ① 是收敛的吗?
研究例题:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}.$$

解 级数 ① 不一定收敛, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$, 显然

$$b_n = \frac{2+(-1)^n}{n} \rightarrow 0 \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{)} \text{ 且 } b_n > 0 (n = 1, 2, \dots),$$

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$ 从第 2 项起, 每相邻两项加括号得

$$\begin{aligned} (*) & -1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{3}{6} - \frac{1}{7}\right) \\ & + \dots + \left(\frac{3}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) + \dots, \end{aligned}$$

(*) 的通项为

$$\frac{3}{2n} - \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

因为 $\frac{3}{2n} - \frac{1}{2n+1} > \frac{3}{2n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} > 0$

知级数

$$\begin{aligned} (*) & \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{3}{6} - \frac{1}{7}\right) \\ & + \dots + \left(\frac{3}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) + \dots, \end{aligned}$$

发散, 所以 (*) 发散, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$ 发散.

【2667】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}.$

解 因为 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\ln^{100} n}{n}$ 单调递减且趋于零, 且级数

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi}{4} \right| = \left| \frac{\cos \frac{\pi}{8} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}} \text{ 有界, 从}$$

而由狄利克雷判别法知原级数收敛.

$$\text{【2668】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}.$$

解 因为

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} &= (-1)^n \left[\frac{1 - \cos 2n}{2n} \right] \\ &= (-1)^n \frac{1}{2n} + (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}, \end{aligned}$$

由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n}$ 收敛.

下面考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 的敛散性.

令 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 的部分和为 S_N , 则

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\cos 2n}{2n} - \sum_{n=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{2\cos 4n}{4n} \\ &= S_N^{(1)} - S_N^{(2)}. \end{aligned}$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{2n}$ 皆收敛, 事实上

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos 2k \right| = \left| \frac{\sin(2k+1) - \sin 1}{2\sin 1} \right| \leq \frac{1}{\sin 1}$$

且 $\frac{1}{2n}$ 单调趋于零, 故由狄利克雷判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{2n}$ 皆

收敛, 于是 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^{(1)}$ 和 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^{(2)}$ 皆存在, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛,

于是原级数收敛.

$$\text{【2669】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}.$$

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\frac{100}{n}} &= 1 - \frac{100}{n} + \left(\frac{100}{n}\right)^2 + \cdots \\ &= 1 + o\left(\frac{100}{n}\right) \quad (n \text{ 很大时}),\end{aligned}$$

所以 $(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$,

由 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 的收敛性知原级数收敛.

【2670】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),\end{aligned}$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 皆收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

知原级数发散.

【2671】 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}).$

解 由

$$\begin{aligned}\sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}) &= \sin\left(n\pi \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}\right) \\ &= \sin\left(n\pi \left(1 + \frac{k^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin\left(n\pi + \frac{k^2\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= (-1)^n \sin\left(\frac{k^2\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= (-1)^n \frac{k^2\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

知原级数收敛.

【2672】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}.$

解 该级数展开后为

$$\begin{aligned}
&-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \\
&- \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots,
\end{aligned}$$

即首先出现三个负项,之后出现五个正项,再后出现七个负项,如此等等,现将这些相邻且具有相同符号的几项合并成一项,于是得一交错级数为

$$\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K \left(\frac{1}{K^2} + \frac{1}{K^2+1} + \dots + \frac{1}{(K+1)^2-1} \right) \quad (*),$$

而

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{1}{K^2} + \frac{1}{K^2+1} + \dots + \frac{1}{K^2+K-1}}_{K \text{ 项}} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{K^2+K} + \dots + \frac{1}{(K+1)^2-1}}_{(K+1) \text{ 项}} \\
&< K \cdot \frac{1}{K^2} + (K+1) \cdot \frac{1}{K^2+K} = \frac{2}{K}, \\
&\underbrace{\frac{1}{K^2} + \frac{1}{K^2+1} + \dots + \frac{1}{K^2+K-1}}_{K \text{ 项}} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{K^2+K} + \dots + \frac{1}{(K+1)^2-1}}_{(K+1) \text{ 项}}
\end{aligned}$$

$$> K \cdot \frac{1}{k^2 \cdot K} + (K+1) \frac{1}{(K+1)^2} = \frac{2}{K+1},$$

所以(*)的通项 $|a_K|$ 满足

$$\frac{2}{K+1} < |a_K| < \frac{2}{K}.$$

于是(*)满足莱布尼兹条件,从而级数(*)收敛,又原级数的部分和包含在级数(*)的相邻两部分和之间,由此知原级数收敛.

【2673】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

知该级数发散.

【2673. 1】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}.$

解 因为

$$\begin{aligned} \cos \frac{n^2 \pi}{n+1} &= \cos \frac{(n^2-1)\pi + \pi}{n+1} \\ &= \cos \left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1} \right) = (-1)^{n-1} \cos \frac{\pi}{n+1} \\ &= (-1)^{n-1} \left(1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \right) \end{aligned}$$

而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln^2 n}$ 与 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}}{\ln^2 n}$

收敛,从而原级数收敛.

【2674】 证明:若

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{\rho}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

其中 $\rho > 0$ (见 2606(H))

则交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots (b_n > 0)$$

是收敛的.

解 由 $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{\rho}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$

知 $b_n > b_{n+1}$, 即 $\{b_n\}$ 单调递减.

又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) = \rho,$

知 $b_n = o\left(\frac{1}{n^{\rho-\epsilon}}\right) \quad (\epsilon > 0) \text{ (2606 结论).}$

于是有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 由莱布尼兹判别法知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ 收敛.

研究下列级数的绝对(2690 题除外)收敛和条件收敛(2675 ~ 2692).

【2675】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p};$

解 当 $p < 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} = \infty$, 故该级数发散.

当 $p = 0$ 时, $n^{-p} = 1$, 故该级数发散.

当 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 为交错级数且满足莱布尼兹条件. 该级数收敛, 又

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n} \quad (0 < p \leq 1),$$

知该级数为条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故该级数绝对收敛.

【2676】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}};$

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{n}}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$

知当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{n}}}$ 绝对收敛, 当 $p \leq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{n}}} \right)$ 不存在或不为零, 故该级数发散.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数通项为 $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$

由 2675 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛, 又 $\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right\}$ 为递增且趋于 1 的数列,

故由阿贝尔判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{n}}}$ 收敛.

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{n}}}{\frac{1}{n^p}} = 1,$

知当 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{n}}}$ 发散. 故该级数在 $0 < p \leq 1$ 条件下为条件收敛.

【2677】 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right];$

解 由 $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right)$

知只要考虑如下三级数

① $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ ② $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ ③ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3p}}$

(1) 当 $p > 1$ 时, 级数 ①, ②, ③ 皆绝对收敛. 于是当 $p > 1$ 时, 原级数绝对收敛.

(2) 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数 ① 条件收敛, 级数 ② 及 ③ 绝对收

敛,于是当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时,原级数条件收敛.

(3) 当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时,存在 $m \in \mathbb{N}$,使得

$$mp \leq 1 < (m+1)p$$

又我们知道

$$\begin{aligned} (*) \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) &= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2p}} + \frac{1}{3} \frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}} \\ &\quad - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^{4p}} + \cdots + \frac{1}{m} \cdot \frac{(-1)^{mn}}{n^{mp}} + o\left(\frac{1}{n^{(m+1)p}}\right), \end{aligned}$$

于是级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{(m+1)p}}$ 收敛, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}}, \dots$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{mn}}{n^{mp}}$ 条件收敛, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{4p}}$ 等(*)式奇数项面积组成的级数发散. 故当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时,原级数发散.

(4) 当 $p \leq 0$ 时, $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,

知原级数发散. 综上所述,当 $p > 1$ 时,原级数绝对收敛;当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时,原级数条件收敛;当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时,原级数发散.

【2678】 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n};$

解 设 $a_n = (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n},$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2} \sin x)^2}{\sqrt[n]{n}} = (\sqrt{2} \sin x)^2,$

知当 $|\sqrt{2} \sin x| < 1$, 即 $|x - n\pi| < \frac{\pi}{4}$ 时,原级数绝对收敛.

当 $|\sqrt{2}\sin x| = 1$, 即 $|x - n\pi| = \frac{\pi}{4}$ 时, 原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \text{ 条件收敛.}$$

当 $|\sqrt{2}\sin x| > 1$, 令 $|\sqrt{2}\sin x| > \alpha > 1$, 于是当 n 充分大时,
有 $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \alpha$,
即 $|a_n| \geq \alpha^n > 1$,
于是 $a_n \not\rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故原级数发散.

$$\text{【2679】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n};$$

解 由题意要使该级数有意义, 必有 $x+n \neq 0$, 即 $x \neq -n$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 于是要求 x 不为负整数, 显然 x 不为负整数时, 原级数条件收敛.

$$\text{【2680】 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p};$$

解 由

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} &= \frac{(-1)^n}{n^p \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^p} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^p} \left[1 - \frac{p(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right), \end{aligned}$$

知当 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+2}}$ 收敛,
于是原级数条件收敛.

当 $p > 1$ 时, $\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 知原级数绝对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 通项不趋于零, 原级数发散.

$$\text{【2681】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p};$$

解 由

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p} &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right]^p \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}} - \frac{p}{n^{\frac{p+1}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}}\right),\end{aligned}$$

知当 $p > 2$ 时, 原级数绝对收敛, 当 $p \leq 0$ 时, 原级数发散.

下面考察 $1 < p \leq 2$ 时的情形, 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}$ 条件收敛,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}$ 收敛, 知原级数条件收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}$ 收敛, 而

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}}$ 发散, 知原级数发散.

【2682】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}};$

解 由
$$\begin{aligned}\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} &= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \left(1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \right)^{-1} \\ &= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \left(1 - \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) \right) \\ &= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),\end{aligned}$$

知当 $p > \frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 收敛, 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}$, 由

于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ 且 $\left\{ \frac{1}{n^p} \right\}$ 单调减小, 又

$$\left| \sum_{l=1}^n \sin \frac{l\pi}{4} \right| = \left| \frac{\cos \frac{\pi}{8} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}},$$

据狄利克雷判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}$ 收敛. 因此, 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 原级数收敛.

当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 由

$$\frac{\left| \sin \frac{n\pi}{4} \right|}{n^p} \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n^p},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^p}$ 收敛, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \sin^2 \frac{n\pi}{4} \right|}{n^p}$ 发散.

于是有 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 原级数条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由 $\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$, 知原级数绝对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 由

$$\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n} = \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{2}}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n},$$

知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$ 发散, 与 2677 同样讨论有 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 原级数

发散.

$$\text{【2683】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \text{由 } (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\ & = (-1)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \\ & = \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}} + O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}\right), \end{aligned}$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$ 条件收敛, 有原级数条件收敛.

$$\text{【2684】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n};$$

解 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100} = \frac{1}{2} < 1,$$

有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n}$ 收敛, 于是原级数绝对收敛.

$$\text{【2685】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}};$$

$$\text{解} \quad \text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2}} = 1,$$

知该级数的通项不趋于零, 于是原级数发散.

$$\text{【2686】} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n};$$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0,$$

且 $\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ 单调下降.

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \left| \sum_{k=2}^n \sin \frac{k\pi}{12} \right| &= \left| \frac{\cos \frac{\pi}{24} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{12}}{2 \sin \frac{\pi}{24}} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{12}}, \end{aligned}$$

于是由狄利克雷判别法知该级数收敛.

又

$$\left| \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n} \right| \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{12}}{\ln n} = \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{6}}{2 \ln n} = \frac{1}{2 \ln n} - \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{2 \ln n},$$

而 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{\ln n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n} \right|$ 发散, 从而原

级数仅为条件收敛.

$$\text{【2687】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p};$$

解 令 $B_s = \{n \mid [\sqrt{n}] = s\}, s = 1, 2, \dots$,
于是 B_s 中元素满足

$$s^2 \leq n < (s+1)^2,$$

从而 B_s 中的元素个数为 $2s+1$,

令 $v_s = \sum_{n \in B_s} \frac{1}{n^p}$, 则原级数按相邻同号项加括号后的级数为

$\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s v_s$, 下面考虑 $\{v_s\}$ 的单调性,

$$\begin{aligned} \text{由} \quad v_s - v_{s+1} &= \sum_{l=0}^{2s} \frac{1}{(s^2+l)^p} - \sum_{l=0}^{2(s+1)} \frac{1}{((s+1)^2+l)^p} \\ &= \sum_{l=0}^{2s} \left\{ \frac{1}{(s^2+l)^p} - \frac{1}{((s+1)^2+l)^p} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{2s} \frac{((s+1)^2 + l)^p - (s^2 + l)^p}{((s+1)^2 + l)^p (s^2 + l)^p} \\
&\quad - \frac{1}{[(s+1)^2 + 2s + 1]^p} - \frac{1}{[(s+1)^2 + 2s + 2]^p},
\end{aligned}$$

现令 $f(x) = x^r (r > 1)$, 设 $x > y > 0$, 有

$$x^r - y^r = r\xi^{r-1}(x-y) > ry^{r-1}(x-y), \xi \in (y, x)$$

于是, 令 $r = 2p, x = \sqrt{(s+1)^2 + l}, y = \sqrt{s^2 + l}$,

当 $p > \frac{1}{2}$ 时有

$$\begin{aligned}
&((s+1)^2 + l)^p - (s^2 + l)^p \\
&= (\sqrt{(s+1)^2 + l})^{2p} - (\sqrt{s^2 + l})^{2p} \\
&\geq 2p \cdot (\sqrt{s^2 + l})^{2p-1} \{ \sqrt{(s+1)^2 + l} - \sqrt{s^2 + l} \} \\
&= 2p(\sqrt{s^2 + l})^{2p-1} \cdot \frac{2s+1}{\sqrt{(s+1)^2 + l} + \sqrt{s^2 + l}} \\
&\geq \frac{2ps^{2p-1}(2s+1)}{2\sqrt{s^2 + 4s + 1}} \quad (0 \leq l \leq 2s),
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
&v_s - v_{s+1} \\
&\geq \frac{ps^{2p-1}(2s+1)^2}{(s^2 + 4s + 1)^{2p+\frac{1}{2}}} - \frac{2}{(s^2 + 4s + 2)^p} \\
&\geq \frac{2s^{2p-1}\left(s^2 + s + \frac{1}{4}\right)}{(s^2 + 4s + 1)^{2p+\frac{1}{2}}} \left[2p - \frac{(s^2 + 4s + 1)^{p+\frac{1}{2}}}{s^{2p-1}\left(s^2 + s + \frac{1}{4}\right)} \right],
\end{aligned}$$

$$\text{由 } 2p > 1, \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{(s^2 + 4s + 1)^{p+\frac{1}{2}}}{s^{2p-1}\left(s^2 + s + \frac{1}{4}\right)} = 1,$$

知当 s 充分大时, $v_s - v_{s+1} > 0$, 于是存在 s_0 , 当 $s \geq s_0$ 时, v_s 是单调下降的叙列, 又当 $n \in B_s, p > 0$ 时有

$$\frac{1}{(s+1)^{2p}} < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{s^{2p}},$$

于是 $\frac{2s+1}{(s+1)^{2p}} < v_s \leq \frac{2s+1}{s^{2p}},$

从而当 $p > \frac{1}{2}$ 时, v_s 单调下降且趋于 0, 由此知级数

$$(*) \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s v_s,$$

收敛, 显然当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数 $(*)$ 为条件收敛, 当 $p > 1$

时, 级数 $(*)$ 为绝对收敛, 当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时级数 $(*)$ 通项不趋于零, 级数 $(*)$ 发散.

设原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$ 的前 N 项和为

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p},$$

$(*)$ 级数的前 M 项和为 $\sigma_M = \sum_{s=1}^M (-1)^s v_s$, 则任意一个部分和 S_N 均包含在某相邻两个部分和 σ_M 和 σ_{M+1} 之间, 即

$$|S_N - \sigma_M| \leq |\sigma_{M+1} - \sigma_M|,$$

因为 $p > \frac{1}{2}$ 时, $(*)$ 级数收敛, 记

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_M = \sigma,$$

则 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_M = \sigma,$

所以原级数收敛. 于是当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 原级数条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 原级数绝对收敛.

当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时, 原级数发散.

【2688】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n};$

解 令

$$A_k = \{n \mid [\ln n] = k\}, k = 1, 2, \dots,$$

于是 $k \leq \ln n < k+1$,

即 $e^k \leq n < e \cdot e^k$,

将 A_k 中的元素按从小到大排列, 记作

$$n_k, n_k + 1, \dots, n_k + p_k - 1.$$

其中 $p_k = [(e-1)e^k]$,

现令 $u_k = \sum_{n \in A_k} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n} = (-1)^k \sum_{n \in A_k} \frac{1}{n} = (-1)^k v_k$,

$$\begin{aligned} \text{其中 } v_k &= \sum_{n \in A_k} \frac{1}{n} = \sum_{l=0}^{p_k-1} \frac{1}{n_k + l} \\ &\geq \sum_{l=0}^{p_k-1} \frac{1}{e \cdot e^k} = \frac{p_k}{e \cdot e^k} = \frac{1}{e \cdot e^k} [(e-1)e^k] \\ &\geq \frac{1}{e \cdot e^k} \cdot \frac{(e-1)e^k}{2} = \frac{e-1}{2e}, \end{aligned}$$

我们可以证明原级数发散, 用反证法

设原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0 , 当 $n \geq N_0$ 时,

任意 $p \in \mathbb{N}$ 有

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon,$$

取 $\varepsilon = \frac{e-1}{4e} > 0$, 有相应的 N (与 $\frac{e-1}{4e}$ 有关),

对 $n \geq N$ 中的 n 选一数 n_k , 使 $n_k \in A_k$, 即

$$e^k \leq n_k < e \cdot e^k,$$

又取自然数 $p = p_k - 1$, 则有

$$|a_{n_k} + a_{n_k+1} + \dots + a_{n_k+p_k-1}| < \varepsilon, \quad (1)$$

但 $|a_{n_k} + a_{n_k+1} + \dots + a_{n_k+p_k-1}|$

$$= |u_k| = v_k \geq \frac{e-1}{2e} = 2\varepsilon > \varepsilon, \quad (2)$$

矛盾, 故原级数发散.

$$\text{【2689】 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p;$$

解 记

$$a_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^p,$$

当 $p \leq 0$ 时, 显然 $|a_n| \geq 1$, 原级数发散.

当 $0 < p \leq 2$ 时, 令 $a_n = (-1)^{n-1} C_n$, 其中

$$C_n = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \right)^p,$$

因为 $1 > \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^p$, 知

$$b_n > \left(\frac{2n+1}{2(n+1)} \right)^p b_n = b_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

且 $0 < b_n < \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)^p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$

于是由莱布尼兹判别法知原级数收敛, 又由 2598 题知当 $0 < p \leq 2$ 时, 原级数条件收敛; $p > 2$ 时, 原级数绝对收敛.

【2690】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n};$

解 因为 $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ 单调下降, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

又
$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^N \sin n \cdot \sin n^2 \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} (\cos n(n-1) - \cos n(n+1)) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} (1 - \cos N(N+1)) \right| \leq 1, \end{aligned}$$

于是由狄利克雷检验法知该级数收敛.

【2691】 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2;$

提示: 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 \neq 0$.

证 反证法,

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 = 0$,
 于是 $\sin^2(n^2) \rightarrow 0$,
 从而 $\cos^2(n^2) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$,
 又 $\sin(n+1)^2$
 $= \sin n^2 \cos(2n+1) + \cos n^2 \sin(2n+1)$,
 于是 $\cos^2(n^2) \sin^2(2n+1)$
 $= (\sin(n+1)^2 - \sin n^2 \cos(2n+1))^2$,
 由 $\sin(n+1)^2 \rightarrow 0$, $\cos^2(n^2) \rightarrow 1$,
 有 $\sin^2(2n+1) \rightarrow 0$,
 于是 $\sin(2n+1) \rightarrow 0$,
 同理有 $\sin(2n-1) \rightarrow 0$,
 又 $\sin(2n+1) + \sin(2n-1) = 2\sin 2n \cos 1$,
 有 $\sin 2n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,
 由此有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0$,
 从而 $\sin^2 n \rightarrow 0$,
 及 $\cos^2 n \rightarrow 1$,
 又 $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$,

当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 n \sin^2 1 = \sin^2 1 \neq 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin(n+1) - \sin n \cos 1)^2 = 0,$$

矛盾, 故 $\sin n^2 \not\rightarrow 0$,

所以原级数发散.

【2692】 令

$$R(x) = \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q}$$

为有理函数, 其中 $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, 当 $x \geq n_0$ 时,

$$|b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q| > 0$$

研究级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 的绝对收敛和条件收敛性.

解 当 $q - p > 1$ 时, 有

$$|R(n)| = \left| \frac{a_0 + a_1 n^{-1} + \cdots + a_p n^{-p}}{b_0 n^{q-p} + b_1 n^{q-p-1} + \cdots + b_q n^{-p}} \right| \\ \sim \frac{|a_0|}{|b_0| n^{q-p}},$$

又 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{q-p}}$ 收敛, 于是 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 绝对收敛.

当 $q \leq p + 1$ 时, $\sum_{n=n_0}^{\infty} |R(n)|$ 发散; 当 $p < q$ 时,

$(-1)^n R(n) \sim (-1)^n \frac{a_0}{b_0 n^{q-p}}$ 收敛, 于是当 $p < q \leq p + 1$ 时,

$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 条件收敛.

当 $p \geq q$ 时, 显然通项 $R(n)$ 不趋于 0, 于是级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 发散.

研究下列级数的收敛性(2693 ~ 2696).

【2693】 $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \cdots$.

解 当 $p > 1, q > 1$, 级数绝对收敛,

当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 级数条件收敛,

当 $pq \leq 0$ 时, 通项不趋于零, 故级数发散.

【2694】 $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots$.

解 $p > 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ 交换项数重排即可得原级数,

故原级数绝对收敛.

当 $0 < p < 1$, 对原级相邻三项加括号组数新级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(4k-3)^p} + \frac{1}{(4k-1)^p} - \frac{1}{(2k)^p} \right), (*)$$

$$\begin{aligned}
 \text{其通项} \quad & \frac{1}{(4k-3)^p} + \frac{1}{(4k-1)^p} - \frac{1}{(2k)^p} \\
 &= \frac{1}{(4k)^p \left(1 - \frac{3}{4k}\right)^p} + \frac{1}{(4k)^p \left(1 - \frac{1}{4k}\right)^p} - \frac{1}{(2k)^p} \\
 &= \frac{1}{(4k)^p} \left(1 + \frac{3p}{4k} + 1 + \frac{p}{4k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) - \frac{1}{(2k)^p} \\
 &= \frac{1}{(2k)^p} \left(\frac{1}{2^{p-1}} - 1\right) + \frac{4p}{(4k)^{p+1}} + o\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right), \quad ①
 \end{aligned}$$

因为①式第一项 $\frac{1}{(2k)^p} \left(\frac{1}{2^{p-1}} - 1\right)$ 组成级数发散, 而 $\frac{4p}{(4k)^{p+1}}$ 组成的级数收敛, $O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right)$ 组成的级数也收敛, 故(*)级数发散, 从而原级数当 $0 < p < 1$ 时发散.

当 $p = 1$ 时, ①式为 $\frac{4p}{(4k)^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)$. 故(*)级数收敛, 而原级数的部分和必在(*)级数某相邻两个部分和之间, 故原级数也收敛, 显然不是绝对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数通项不趋于零, 发散.

$$\text{【2695】} \quad 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \dots$$

解 与上题类似, 原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 具有相同的敛散性, 其中

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{1}{(4n-3)^p} + \frac{1}{(4n-1)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p} \\
 &= \frac{1}{(4n)^p} \left(2 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{(2n)^p} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^p} \\
 &= \frac{1}{(2n)^p} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right) + \frac{1}{2^p} \left(\frac{p}{2^p} - \frac{p}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^{p+1}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right), \quad ①
 \end{aligned}$$

当 $p > 1$ 时, 原级数显然绝对收敛,

当 $0 < p < 1$ 时, 由①式第一项组成的级数发散, 而由①式

第二项及第三项各组成的级数皆收敛,于是原级数当 $0 < p < 1$ 时发散,当 $p = 1$ 时,① 式为 $O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right)$,收敛,从而原级数收敛,显然为条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时,原级数发散.

$$\text{【2696】 } 1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \dots$$

解 令 $S = \min(p, q) > 1$,

$$\text{记级数 } 1 + \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \dots \quad \text{①}$$

的前 N 项部分和 S_N ,有

$$S_N \leq \sum_{k=1}^N \frac{2}{k^S} = 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^S} < \infty,$$

于是 $\{S_N\}$ 单调上升且且有界,从而当 $p > 1, q > 1$ 时,原级数绝对收敛,当 $0 < p = q \leq 1$ 时,级数 ① 发散,现考虑级数

$$\left(1 - \frac{2}{2^p}\right) + \sum_{k=1}^N u_k, \quad \text{②}$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } u_k &= \frac{1}{(3k)^p} + \frac{1}{(3k+1)^p} - \frac{2}{(3k+2)^p} \\ &= \frac{1}{(3k)^p} \left[1 - \left(1 + \frac{2}{3k}\right)^{-p}\right] \\ &\quad + \frac{1}{(3k+1)^p} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{3k+1}\right)^{-p}\right) \\ &= \frac{1}{(3k)^p} \left(\frac{2p}{3k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) + \frac{1}{(3k+1)^p} \left(\frac{1}{3k+1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\ &= \frac{2p}{(3k)^{p+1}} + \frac{p}{(3k+1)^{p+1}} + O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right) \\ &= \frac{3p}{(3k)^{p+1}} + O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right), \end{aligned}$$

于是 $\sum_{k=1}^N u_k$ 收敛,与 2694 类似,原级数与级数 ② 有相同的敛散性,

于是原级数当 $0 < p = q \leq 1$ 时条件收敛.

当 $pq \leq 0$ 时, 原级数发散.

【2697】 证明级数

$$(1) \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots;$$

$$(2) \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots.$$

在 $(0, \pi)$ 区间非绝对收敛.

证 (1) 因为

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin nx}{n} \right| &\geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1 - \cos 2nx}{2n} \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}, \end{aligned}$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$, $\left\{ \frac{1}{2n} \right\}$ 单调下降, $\sum_{n=1}^N \cos 2nx$ 有界, 于是由狄利克雷判

别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ 收敛; 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 因而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n} \right|$ 发散, 原

级数显然在 $(0, \pi)$ 内收敛, 于是原级数仅为条件收敛.

(2) 由

$$\left| \frac{\cos nx}{n} \right| = \frac{\cos^2 nx}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{\cos 2nx}{2n},$$

于是据 ① 有原级数在 $(0, \pi)$ 内仅为条件收敛.

【2698】 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0 < x < \pi).$$

对于所有参数 (p, x) 的总和确定:

(1) 绝对收敛域;

(2) 非绝对收敛域.

解 由

$$\left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}, \quad \left| \frac{\sin nx}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p} \quad (0 < x < \pi).$$

知当 $p > 1$ 时, 这两个级数对任意 $x \in (0, \pi)$ 皆绝对收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 据 $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ 单调下降趋于零, 及

$$\sum_{n=1}^M \cos nx, \sum_{n=1}^M \sin nx \quad (0 < x < \pi),$$

皆有界(任意 $M \in \mathbb{N}$) 知这两级数均收敛, 又

$$\left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \geq \frac{\cos^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} + \frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

$$\left| \frac{\sin nx}{n^p} \right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos 2nx}{2n^p}.$$

知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos nx|}{n^p}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^p},$$

当 $0 < p \leq 1$ 时均发散, 于是任意 $x \in (0, \pi)$, 当 $0 < p \leq 1$ 时, 两级数条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 两级数显然发散, 综上所述, 绝对收敛域为 $(p, x) \in (1, \infty) \times (0, \pi)$, 条件收敛域为 $(p, x) \in (0, 1] \times (0, \pi)$.

【2698. 1】 研究级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}; (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}; (3) \sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n}.$$

解 (1) 因为 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 单调下降趋近于 1 ($n > 3$),

$\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ 单调下降趋近于 0 ($n > 1$),

于是 $\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} > \frac{1}{n} \quad (n > 3),$

故该级数条件收敛.

(2) 因为

$$\sin\left(n + \frac{1}{n}\right) = \sin n \cos \frac{1}{n} + \cos n \sin \frac{1}{n}.$$

而 $\sum_{k=1}^M \sin K$ 和 $\sum_{k=1}^M \cos K$ 皆有界 ($\forall M \in \mathbb{N}$); $\left\{\frac{1}{\ln \ln n}\right\}$ 单调下降趋于零, 于是由狄利克雷判别法知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln \ln n}, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln \ln n}$ 皆收敛.

又 $\left\{\cos \frac{1}{n}\right\}$ 单调上升且有界, $\left\{\sin \frac{1}{n}\right\}$ 单调下降且有界, 由阿

贝尔判别法知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln \ln n} \cos \frac{1}{n}, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln \ln n} \sin \frac{1}{n}$ 皆收敛.

故原级数收敛. 又

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)} \right| &\geq \frac{\sin^2\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln \ln n} \\ &= \frac{1 - \cos\left(2n + \frac{2}{n}\right)}{2 \ln \ln n}. \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln \ln n}$ 发散, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(2n + \frac{2}{n}\right)}{2 \ln \ln n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln \ln n} \right|$ 发散, 所

以原级数为条件收敛.

(3) 因为 $\left| \frac{\sin n}{n + 10 \sin n} \right| > \frac{1}{n + 10},$

于是我们有 $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n + 10 \sin n} \right|$ 发散. 又

$$\begin{aligned} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n} &= \frac{\sin n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{10 \sin n}{n}} \\ &= \frac{\sin n}{n} - \frac{10 \sin^2 n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \end{aligned}$$

因为 $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n}, \sum_{n=10}^{\infty} \frac{10 \sin^2 n}{n^2}, \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 皆收敛; 故原级数收敛且为条件收敛.

【2699】 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q}.$$

确定:

(1) 绝对收敛域;

(2) 条件收敛域.

解 令

$$a_n = \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q},$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(\frac{n+1}{n+1+p} \right) \left(\frac{n+1}{n} \right)^q \\ &= \left(1 - \frac{p}{n+1+p} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^q \\ &= \left(1 - \frac{p}{n} + \frac{p(p+1)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \cdot \\ &\quad \left(1 + \frac{q}{n} + \frac{q(q-1)}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ &= 1 + \frac{q-p}{n} + A_n, \end{aligned} \quad (*)$$

$$\text{其中 } A_n = \left(\frac{1}{2}q(q-1) - pq + p(p+1) \right) \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

据高斯判别法知, 当 $q > p+1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 于是原级数绝对收敛, 显然当 p 为负整数时, 级数各项皆为零, 收敛.

当 $q \leq p+1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 原级数不绝对收敛.

当 $p < q \leq p+1$ 时, 由 (*) 式知当 n 足够大时 $a_n > a_{n+1}$, 即存在 $n_0 > 0$, 当 $n > n_0$ 时, $\{a_n\}$ 单调下降, 现记 $q = p + \varepsilon, \varepsilon > 0$. 于是有

$$a_n = \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^{p+\varepsilon}},$$

$$\text{从而有 } \ln a_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{p}{k}\right) - (p+\varepsilon)\ln n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \frac{p}{k} + \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{k^2}\right) - (p + \epsilon) \ln n \\
&= p \ln n + pr + B + O\left(\frac{1}{n}\right) - p \ln n - \epsilon \ln n \\
&= pr + B + O\left(\frac{1}{n}\right) - \epsilon \ln n \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty),
\end{aligned}$$

其中 r, B 为常数. 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 据莱布尼兹判别法知

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 故当 $p < q \leq p+1$ 时, 原级数条件收敛.

当 $q = p$ 时,

$$\ln a_n = pr + B + O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow pr + B \quad (n \rightarrow \infty),$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{pr+B} \neq 0$, 原级数发散.

当 $q < p$ 时, 由(*)式知当 n 足够大时有 $a_n < a_{n+1}$. 于是通项也不趋向于零, 故原级数发散.

综上所述, 原级数的绝对收敛域为 $q > p+1$, 条件收敛域为 $p < q \leq p+1$.

【2700】 研究级数的收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}, \text{ 其中 } \binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}.$$

解 令

$$a_n = \binom{m}{n},$$

有
$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1 + \frac{m+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由高斯判别法知: 当 $m+1 > 1$, 即 $m > 0$ 时, 级数绝对收敛.

当 $m < 0$ 时, 级数不绝对收敛. 当 $m = 0$ 时, 级数的每一项皆为 0, 收敛. 当 $-1 < m < 0$ 时, 存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \binom{m}{n}$ 为

交错级数, 由 $-1 < m < 0$ 有 $\left| \frac{m-n}{n+1} \right| < 1$, 于是有 $|a_n + 1| <$

$|a_n|$, 即 $\{|a_n|\}$ 是单调减少的. 又

$$\begin{aligned}\ln |a_n| &= \ln \left| \frac{m(m-1)\cdots(m-n-1)}{n!} \right| \\ &= \ln \left| \left(1 - \frac{m+1}{1}\right) \left(1 - \frac{m+1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{m+1}{k}\right),\end{aligned}$$

$$\text{因为 } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{m+1}{k}\right)}{-\frac{m+1}{k}} = 1,$$

而 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$. 于是有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{m+1}{k}\right) \rightarrow -\infty,$$

从而有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, 由莱布尼兹判别法知原级数收敛, 即当 $-1 < m < 0$ 时, 原级数仅为条件收敛.

当 $m \leq -1$ 时, 级数通项不趋于零, 发散.

综上所述, $m \geq 0$ 时, 级数绝对收敛, $-1 < m < 0$ 时, 级数条件收敛.

【2701】 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, 则能否确认级数

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也是收敛的?

研究例题:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right].$$

解 不一定, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right]$ 发散, 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1.$$

但如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, 则可断定 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

【2702】 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为非绝对收敛级数, 且

$$P_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| + a_i}{2}, N_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| - a_i}{2}.$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1$.

证 由题意 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛. 事实上, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则不定有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1,$$

如 $a_i = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 0$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛.

由

$$\frac{N_n}{P_n} = \frac{\sum_{i=1}^n |a_i| - \sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^n a_i} = \frac{1 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|}}{1 + \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|}},$$

及 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|}} = 1.$$

【2703】 证明:对于每个 $p > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和介于 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间.

证 由

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\right),$$

中每一括号内的数皆为正数知 $\{S_{2n}\}$ 是单调上升序列, 又

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\right) - \left(\frac{1}{4^p} - \frac{1}{5^p}\right) - \cdots \\ &\quad - \left(\frac{1}{(2n-2)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p}\right) - \frac{1}{(2n)^p} < 1, \end{aligned}$$

即 $\{S_{2n}\}$ 有界, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 存在且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \leq 1$.

由莱布尼兹知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} (p > 0)$ 收敛, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \leq 1,$$

又由 $S_{2n} = 1 - \frac{1}{2^p} + \bar{S}_{2n}$,

$$\begin{aligned} \text{其中 } \bar{S}_{2n} &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(2k-1)^p} - \frac{1}{(2k)^p} \right) \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{p}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}}, \end{aligned}$$

这里 $0 < \theta_k < 1$ (由拉格朗日中值定理及得上式).

由 $p > 0$ 有

$$\frac{1}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}} \geq \frac{1}{(2k)^{p+1}} \quad (k = 2, 3, \cdots),$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \bar{S}_{2n} &\geq \sum_{k=2}^n \frac{p}{(2k)^{p+1}} = \frac{p}{2^{p+1}} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{p+1}} \\ &\geq \frac{p}{2^{p+1}} \left(\int_2^n \frac{dx}{x^{p+1}} + \frac{1}{n^{p+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} + \frac{p}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^{p+1}} \\
&= \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{p}{n}\right) = \frac{1}{2^{2p+1}} + O\left(\frac{1}{n^p}\right),
\end{aligned}$$

进一步,任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0 , 当 $N \geq N_0$ 时, 有 $\left|O\left(\frac{1}{n^p}\right)\right| < \varepsilon$. 从而有

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2^p} + \bar{S}_{2n} \geq 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p+1}} - \varepsilon,$$

又由
$$2^{p-1} + \frac{1}{2^{p+1}} = \frac{2^{2p} + 1}{2^{p+1}} > \frac{2 \cdot 2^p}{2 \cdot 2^p} = 1,$$

有
$$2^p + \frac{1}{2^p} > 2,$$

于是有
$$1 + \frac{1}{2^{2p}} > \frac{2}{2^p},$$

即
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2p+1}} > \frac{1}{2^p},$$

于是
$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p+1}} > \frac{1}{2},$$

从而
$$S_{2n} > \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \geq \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 有

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \leq 1.$$

【2703. 1】 若

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}; (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^0}{\sqrt{n}}.$$

解 (1) 由莱布尼茨判别法可知原级数收敛, 且

$$|S - S_n| \leq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + 1}}.$$

因此要使 $|s - s_n| \leq 10^{-6}$, 只需 $n \geq 10^6$ 即少部分和应该取级数的多少项可使所得到的和精确度到 $\sum = 10^{-6}$?

【2704】 证明: 若将级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

的各项重新排列, 使依次 p 个正项的一组与依次 q 个负项的一组相交替, 则新级数的和将是 $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

证 我们要证明

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2q} \\ & + \frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} + \dots \\ & = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}, \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

我们知道 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \epsilon_n$,

其中 C 为欧拉常数, $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$, 于是有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} &= \frac{1}{2} H_m \\ &= \frac{1}{2} \ln m + \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \epsilon_m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1} &= H_{2k} - \frac{1}{2} H_k \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln k + \frac{C}{2} + \epsilon_{2k} - \frac{1}{2} \epsilon_k. \end{aligned}$$

考虑级数 ① 的前 $2n$ 项的和

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \dots \\ &\quad - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2p+1} + \dots - \frac{1}{2(n-1)q} + \frac{1}{2(n-1)p+1} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2np-1} \end{aligned}$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{2np}{2(n-1)q} + \alpha_n$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + \alpha'_n,$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_n = 0$,

又 $S_{2n+1} = S_{2n} + \beta_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \rightarrow 0$,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

命题得证.

【2705】 证明:若调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

各项的次序不重新排列而是改变符号,使得 p 个正项后面紧跟着 q 个负项($p \neq q$),则此级数仍然是发散的. 只是在 $p = q$ 时是收敛的.

证 若 $p \neq q$,不妨设 $p > q$,令

$$a_k = \frac{1}{(p+q)k+1} + \dots + \frac{1}{(p+q)k+p} \\ - \frac{1}{(p+q)k+p+1} - \dots - \frac{1}{(p+q)k+p+q},$$

易知 $a_k > \frac{1}{(p+q)k+1} > 0 (k = 1, 2, \dots)$,

但 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+q)k+1}$ 发散,于是 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 发散,故按题中规则得来的级数发散.

若 $p = q$,令

$$b_k = \frac{1}{kp+1} + \frac{1}{kp+2} + \dots + \frac{1}{kp+p}, k = 0, 1, \dots$$

显然 $b_k > b_{k+1} > 0$,且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0,$$

于是由莱布尼兹判别法有 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ 收敛, 即所得级数, 当 $p = q$ 时收敛.

§ 3. 级数的运算

级数的和与乘积 定义:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

其中 $c_n = a_1 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$.

若两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是收敛的, 则等式(1) 具有非形式的意义, 而等式(2) 在两个级数收敛且至少有一个是绝对收敛时也具有非形式意义.

【2706】 若两个级数中: (1) 一个级数收敛, 而另一个发散; (2) 两个级数都是发散的. 问两个级数的和是什么?

解 (1) 一定发散, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散,

设 $c_n = a_n + b_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散

反证法, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 于是 $b_n = c_n - a_n$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 矛盾.

(2) 可能收敛, 也可能发散.

i) 设 $a_n = (-2)^n, b_n = (-2)^{n+1}$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散, 但

$$c_n = a_n + b_n = 0.$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

ii) 设 $a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$,

则 $c_n = a_n + b_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$,

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 皆发散.

【2707】 求两个级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right]$$

解 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right)$ 皆收敛有

$$\begin{aligned} \text{原级数} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} + \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} \right) = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

求下列级数的和(2708 ~ 2710).

【2708】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right]$.

解 原级数 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = \frac{3}{4}.$$

【2709】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

解 易知该级数绝对收敛, 现将 $n = 0, 1, 2, \dots$ 分为三类:

$$A_1 = \{n \mid n = 3k, k = 0, 1, 2, \dots\},$$

$$A_2 = \{n \mid n = 3k + 1, k = 0, 1, 2, \dots\},$$

$$A_3 = \{n \mid n = 3k + 2, k = 0, 1, 2, \dots\},$$

则

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} \\ &= \sum_{n \in A_1} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} + \sum_{n \in A_2} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} + \sum_{n \in A_3} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{2^{3k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi + \frac{\pi}{3})}{2^{3k+2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4} \cos(\pi + \frac{\pi}{3})\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^3}\right)^k \\ &= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

于是我们有

$$\text{原级数的和} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1 = \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7}.$$

$$\text{【2710】} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \quad (|xy| < 1).$$

解 将 $n = 0, 1, 2, \dots$ 分为二类

$$A_1 = \{n \mid n = 2k, k = 0, 1, 2, \dots\},$$

$$A_2 = \{n \mid n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots\},$$

于是

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \\ &= \sum_{n \in A_1} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} + \sum_{n \in A_2} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^{k+1}, \end{aligned}$$

因为 $|xy| < 1$, 故原级数收敛, 且其和为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} &= \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k + y \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k \\ &= (1+y) \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = \frac{1+y}{1-xy}.\end{aligned}$$

【2711】 证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

证法一: 令

$$a_n = \frac{1}{n!}, b_n = \frac{(-1)^n}{n!},$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 皆绝对收敛. 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$$\begin{aligned}\text{其中 } c_n &= \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{i!} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!} \right] \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{1}{n!} (1-1)^n = 0, (n=1, 2, \cdots),\end{aligned}$$

$$\text{于是 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1.$$

证法二: 由 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 知

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!},$$

故
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e \cdot e^{-1} = 1.$$

【2712】 证明:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n \quad (|q| < 1).$$

证 由 $|q| < 1$ 知 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 绝对收敛, 于是

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

其中
$$c_n = \sum_{i=0}^n q^i \cdot q^{n-i} = q^n (n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

故
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n.$$

【2713】 证明: 收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 的平方是发散级数.

证 反证法. 设 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2$ 收敛, 其积记为 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

其中
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{1} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}} + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1} \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1} \right), \end{aligned}$$

又
$$\begin{aligned} n^2 - k(n-k+1) &= n^2 - nk + k^2 - k \\ &= \left(n - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2 - 4k}{4} > 0 \quad (k \geq 2), \end{aligned}$$

又当 $k = 1$ 时

$$1 \cdot (n-1+1) = n \leq n^2,$$

因此 $\frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{n}, k = 1, 2, \dots,$

于是有 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散, 矛盾. 因此, 级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2$ 发散.

【2714】 证明: 两个收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \quad (\beta > 0),$$

的乘积在 $\alpha + \beta > 1$ 时是收敛级数, 而在 $\alpha + \beta < 1$ 时是发散级数.

证 设

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, (\alpha > 0, \beta > 0)$$

由乘积定义

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{(-1)^{i-1}}{i^{\alpha}} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i+1)^{\beta}} \right) \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i+j=n+1}} \frac{1}{i^{\alpha} j^{\beta}} = (-1)^{n-1} d_n, \end{aligned}$$

其中 $d_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i^{\alpha} (n-i+1)^{\beta}} \quad (n = 1, 2, \dots),$

i) 当 $\alpha + \beta < 1$ 时, 由

$$\begin{aligned} d_n &\geq \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^{\alpha} (n-i+1)^{\beta}} \geq \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha}} \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{(n-i+1)^{\beta}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha}} \sum_{\frac{n}{2} \leq j \leq n} \frac{1}{j^{\beta}} \geq \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha}} \int_{\frac{n}{2}}^n \frac{dx}{x^{\beta}} \\ &= 2^{\alpha} \cdot \frac{1}{1-\beta} \left(1 - \frac{1}{2^{1-\beta}}\right) n^{1-(\alpha+\beta)}, \end{aligned}$$

有 $d_n \rightarrow +\infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 为发散级数.

ii) 当 $\alpha + \beta > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} + \sum_{\frac{n}{2} \leq i \leq n} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta}. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} &\leq \frac{1}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)^\beta} \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha} \\ &\leq \frac{1}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)^\beta} \left(1 + \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dx}{x^\alpha}\right) \\ &= O(n^{-\beta}) + O\left(n^{-\beta} \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dx}{x^\alpha}\right) = O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}), \end{aligned}$$

类似地 $\sum_{\frac{n}{2} < i \leq n} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \leq O(n^{-\alpha}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}),$

由 $\alpha > 0, \beta > 0, 1 - (\alpha + \beta) < 0,$

有 $d_n \leq O(n^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$),

记 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}, \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$

的部分和分别为 A_n, B_n, S_n . 于是

$$A_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha}, B_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i^\beta},$$

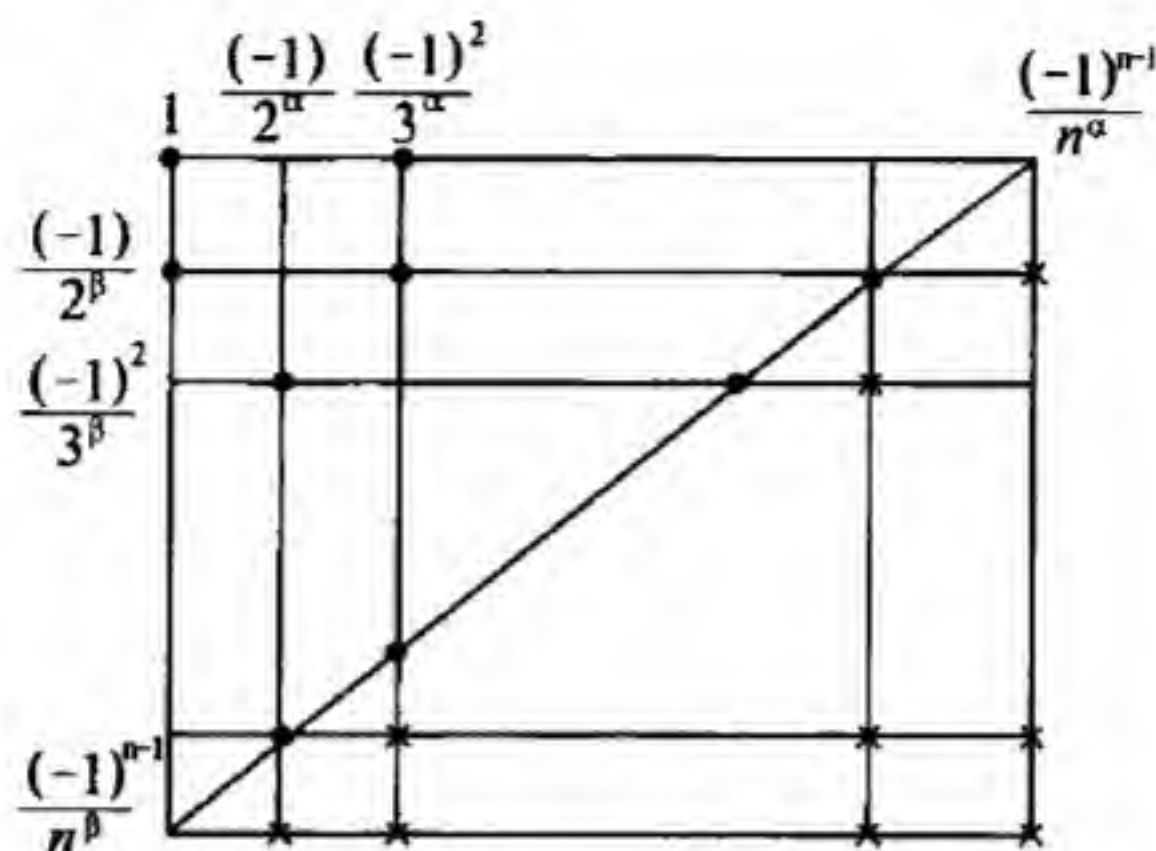
$$C_n = \sum_{i=1}^n c_i = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i+j=k+1}} \frac{1}{i^\alpha j^\beta},$$

令 $\Lambda_n = A_n B_n - S_n,$

则

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta} \right) - S_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i^\alpha} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j^\beta} \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i+j=k+1}} \frac{1}{i^\alpha j^\beta}. \end{aligned}$$

为估计上述各项,列乘法表如下



$A_n B_n$ 表示上表正方形各交点上乘积的全部和.

S_n 是乘法表对角线右上角各交点上乘积项的总和, 于是 $\Lambda_n = A_n B_n - S_n$ 是乘法表对角线的右下部分各交点处乘积项(打 \times 号处的乘积项)的总和, 从而有

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} \left[\frac{(-1)}{2^\alpha} + \frac{(-1)^2}{3^\alpha} + \cdots + \frac{(-1)^{(n-1)}}{n^\alpha} \right] \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)^\beta} \left[\frac{(-1)^2}{3^\alpha} + \frac{(-1)^3}{4^\alpha} + \cdots + \frac{(-1)^{(n-1)}}{n^\alpha} \right] \\ &\quad + \cdots + \frac{(-1)}{2^\beta} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right] \\ &= (-1)^n \left[\frac{1}{n^\beta} \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)^\beta} \left(\frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right) \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{1}{2^\beta} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) \right], \end{aligned}$$

进一步 $|\Lambda_n| = \frac{1}{n^\beta} \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$

$$+ \frac{1}{(n-1)^\beta} \left(\frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2^\beta} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right)$$

$$\leq \frac{1}{n^\beta} \cdot \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{(n-1)^\beta} \cdot \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\leq \sum_{\substack{i+j=n+2 \\ 2 \leq i, j \leq n}} \frac{1}{j^\beta i^\alpha} \leq \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n+1 \\ i+j=n+2}} \frac{1}{i^\alpha j^\beta} = d_{n+1}.$$

由 $d_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 有 $\Lambda_n \rightarrow 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n B_n - \Lambda_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \lim_{n \rightarrow \infty} B_n,$$

故收敛.

综上所述, 当 $\alpha + \beta > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} (\alpha > 0)$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} (\beta > 0)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 皆为收敛.

【2715】 验证两个发散级数

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{及} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right),$$

的乘积是绝对收敛级数.

证 令

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{m=1}^{\infty} u_m,$$

其中 $u_1 = 1, u_2 = -\frac{3}{2}, u_3 = -\left(\frac{3}{2}\right)^2, \dots,$

$$u_m = -\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} (m = 2, 3, \dots),$$

又令 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m,$

其中 $v_1 = 1, v_2 = 2 + \frac{1}{2^2}, v_3 = \frac{3}{2} \left(2^2 + \frac{1}{2^3}\right), \dots$

$$v_m = \left(\frac{3}{2}\right)^{m-2} \cdot \left(2^{m-1} + \frac{1}{2^m}\right) \quad (m = 2, 3, \dots),$$

于是 $c_1 = u_1 v_1 = 1$, 按乘积定义

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

$$\begin{aligned}
\text{其中 } c_n &= u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1 \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} \cdot \left(2^{n-2} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&\quad + \cdots + \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right] \cdot \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right] \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left[(2^{n-1} - 2^{n-2} - 2^{n-3} - \cdots - 2 - 1) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left[\left(2^{n-1} - \frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right) + \left[\frac{1}{2^n} - \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right]\right] \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{3}{2^n} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

绝对收敛.

§ 4. 函数项级数

1. 收敛域 使函数级数

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad ①$$

收敛的那些数值 x 的总体 X 被称为这个级数的收敛域, 而函数

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (x \in X) \text{ 称为级数的和.}$$

2. 一致收敛

对于函数序列 $f_1(x), f_2(x), \cdots$, 若

(1) 存在极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in X);$$

(2) 对于任何数 $\epsilon > 0$, 存在 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $x \in X$ 时, $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ 成立, 则称该函数序列在 X 集上一致收敛. 在这种情况下写成: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

若函数级数 ① 部分和序列

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

在 X 集上能一致收敛, 则函数级数 ① 在这个集上被称为一致收敛.

3. 柯西准则 对于级数 ① 在 X 集上的一致收敛的充分必要条件是对于每一个 $\epsilon > 0$ 存在数 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 及 $p > 0$ 时, 对于所有的 $x \in X$, 以下不等式成立:

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \epsilon.$$

4. 维尔斯特拉斯判别法 若存在收敛的数项级数

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots, \quad (2)$$

使得当 $x \in X$ 时,

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

则级数 ① 在 X 集上绝对一致收敛.

5. 阿贝尔判别法 若

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 X 集上一致收敛;

(2) 函数 $b_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 全体是有界的且对每一个 x 形成单调序列, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x), \quad (3)$$

在 X 集上一致收敛.

6. 狄利克雷判别法 若

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和全体有界;

(2) 序列 $b_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 对每一个 x 都是单调的, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时在 X 上一致地趋于零,

则级数 ③ 在 X 集上一致收敛.

7. 函数项级数的性质

(1) 以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

✓(2) 若函数项级数 ① 在每一个 $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ 中一致收敛且存在有穷极限:

$$\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = A_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则 ① 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛;

② 以下等式成立:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \right\}.$$

(3) 当 $a < x < b$ 时, 若收敛级数 ① 各项均可微分, 以及导函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在区间 (a, b) 一致收敛, 则:

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \quad \text{当 } x \in (a, b) \text{ 时.}$$

(4) 若级数 ① 各项是连续的, 且这个级数在有限区间 $[a, b]$ 一致收敛, 则

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx, \quad (4)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 若 $\int_a^b R_n(x) dx \rightarrow 0$.

其中 $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$.

则一般来说公式 ④ 为真. 对于积分限为无穷情况, 这个最后的条件也是适用的.

确定以下函数项级数的(绝对和条件的)收敛域(2716 ~ 2736).

【2716】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n};$

解 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{x^{n+1}}}{\frac{n}{x^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \right|,$$

于是当 $\left| \frac{1}{x} \right| < 1$, 即 $|x| > 1$ 时, 原级数绝对收敛.

【2717】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n;$

解 由

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n} \right| \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|, \end{aligned}$$

有当 $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$, 即 $(1-x)^2 < (1+x)^2$ 或 $x > 0$ 时, 级数绝对收敛.

当 $x = 0$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ 条件收敛, 当 $x < 0$ 时, 发散.

【2718】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n;$

解 由

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{n+2} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^{n+1}}{\frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n} \right| \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot \frac{x}{2x+1} \right| = \left| \frac{x}{2x+1} \right|, \end{aligned}$$

有当 $\left| \frac{x}{2x+1} \right| < 1$, 即 $x > -\frac{1}{3}$ 或 $x < -1$ 时, 原级数绝对收敛, 当

$x = -\frac{1}{3}$ 或 $x = -1$ 时, 原级数通项不趋于零, 故发散.

$$\text{【2719】} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n;$$

解 由

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^{n+1}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n} \right| \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| = \left| \frac{2x}{1+x^2} \right|, \end{aligned}$$

有当 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| < 1$, 即 $(x^2-1)^2 > 0$, 级数绝对收敛. 即 $|x| \neq 1$ 时, 级数绝对收敛.

当 $x = -1$ 时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 条件收敛.

当 $x = 1$ 时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散.

$$\text{【2720】} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n;$$

解 由

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)3^{2(n+1)}}{2^{n+1}} x^{n+1} (1-x)^{n+1}}{\frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n} \right| \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^2(n+1)}{2n} x(1-x) \right| \\ = \frac{9}{2} |x(1-x)|, \end{aligned}$$

有当 $\frac{9}{2} |x(1-x)| < 1$, 即 $|x(1-x)| < \frac{2}{9}$ 时, 也就是

$-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{1}{3}, \frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{17}+3}{6}$ 时该级数绝对收敛, 在

上述两区间端点处,级数显然发散.

$$\text{【2721】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2};$$

解 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1} \sin^{n+1} x}{(n+1)^2}}{\frac{2^n \sin^n x}{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n^2 \sin x}{(n+1)^2} \right| = 2 |\sin x|,$$

有当 $2 |\sin x| < 1$, 即 $|\sin x| < \frac{1}{2}$ 时, 也就是 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{6}$ (k

$= 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 该级数绝对收敛, 当 $|x - k\pi| = \frac{\pi}{6}$ 时, 原

级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 收敛. 综上所述, 当 $|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{N}$ 时, 该级数绝对收敛.

$$\text{【2722】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p};$$

解 当 $p > 1$, x 不为负整数, 则级数绝对收敛.

当 $0 < p \leq 1$, x 不为负整数, 则级数条件收敛.

当 $p \leq 0$, 级数发散.

$$\text{【2723】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} \quad (q > 0; 0 < x < \pi);$$

解 由

$$\left| \frac{\sin nx}{2n^{q-p}} \right| \leq \left| \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} \right| \leq \frac{1}{n^{q-p}},$$

知, 当 $q > p+1$ 时, 级数绝对收敛, 当 $q \leq p+1$ 时, 由题 2698 知

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} \right|$ 发散.

当 $p < q \leq p+1$ 时, 对任意 $x \in (0, \pi)$, $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$ 有界, 又

$$\frac{n^p}{1+n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

于是级数收敛.

当 $q \leq p$ 时, 级数显然发散, 综上所述, 当 $q > p+1$ 时, 级数绝对收敛, 当 $p < q \leq p+1$ 时, 级数条件收敛.

【2724】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (兰伯特级数);

解 当 $|x| < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 绝对收敛, 又 $\left\{ \frac{1}{1-x^{2n}} \right\}$ 单调递减且有下界, 于是由阿贝尔判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$ 收敛, 又 $\{x^n\}$ 单调递减且有界, 于是由阿贝尔判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}}$ 收敛. 而

$$\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^n}{1-x^{2n}} + \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}},$$

故原级数当 $|x| < 1$ 时绝对收敛.

当 $|x| = 1$ 时, 级数无意义.

当 $|x| > 1$ 时, 用反证法, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ 收敛.

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n},$

收敛. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$ 也收敛 (阿贝尔判别法). 从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

收敛, 矛盾. 因此, $|x| > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ 发散.

【2725】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n;$

解 当 $|x| < 1$ 时由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x(x+n)}{n} \right| = |x|,$$

故级数绝对收敛.

当 $|x| = 1$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x^n \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| \rightarrow e^{\pm 1} \neq 0,$$

于是级数发散, 当 $|x| > 1$ 时, $a_n \rightarrow \infty$, 级数发散.

【2726】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}};$

解 $\left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right| \leq |x|^n,$

知当 $|x| < 1$ 时, 级数绝对收敛, 当 $|x| = 1$ 时,

$$|a_n| = \left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right| = \frac{1}{2},$$

有 $a_n \not\rightarrow 0$, 原级数发散.

当 $|x| > 1$ 时

$$\left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right| = \left| \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|^n,$$

由 $|x| > 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < 1$ 知原级数绝对收敛.

【2727】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)};$

解 当 $|x| < 1$ 时, 由

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n+1})}}{\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}} \right| \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{1+x^{n+1}} \right| = |x| < 1, \end{aligned}$$

知级数绝对收敛.

当 $x = 1$ 时, 级数通项为 $\frac{1}{2^n}$, 原级数收敛.

当 $x = -1$ 时, 级数通项无意义.

当 $|x| > 1$ 时, 因为

$$\begin{aligned} & \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \\ &= \frac{x^{\frac{n(1-n)}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(1-n)}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}, \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{(n+1)n}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^{n+1}}\right)} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left|\frac{1}{x}\right|^n}{\left|1+\frac{1}{x^{n+1}}\right|} = 0 \quad \left(\text{因 } \left|\frac{1}{x}\right|^n < 1\right), \end{aligned}$$

知当 $|x| > 1$ 时, 原级数绝对收敛.

【2728】 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx};$

解 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{n e^{-nx}} = e^{-x},$$

知当 $e^{-x} < 1$, 即 $x > 0$ 时, 级数绝对收敛. 当 $x = 0$ 时, 级数通项为 n , 原级数发散, 当 $x < 0$ 时, $e^{-x} > 1$, 原级数发散.

$$\text{【2729】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1+a^{2n}x^2};$$

$$\text{解} \quad \text{令 } a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1+a^{2n}x^2},$$

当 $x=0$ 时

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n},$$

知原级数发散.

当 $x \neq 0$, 且 $|a| > 1$ 时, 由

$$0 < a_n < \frac{1}{a^{2n}x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{|a|} \right)^{2n},$$

知原级数绝对收敛.

当 $x \neq 0$, 且 $|a| \leq 1$ 时, 由

$$|a_n| \geq \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{n},$$

知原级数发散.

$$\text{【2730】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}}),$$

($x > 0$);

解 令

$$a_n = (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}}),$$

1) 当 $x=2$ 时, $a_n=0$ ($n=1, 2, \cdots$), 原级数收敛

2) 当 $x \neq 2$ 时, 又由题设 $x > 0$, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1,$$

于是当 n 充分大后, a_n 不变号, 由

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x^{\frac{1}{n+1}} - 1)}{2 - x^{\frac{1}{n+1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{n+1}}} - 1}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2 - x^{\frac{1}{n+1}}} \right] = \ln x, \end{aligned}$$

知当 $x > e$ 时, 即 $\ln x > 1$, 原级数绝对收敛, 当 $x < e$ 时, 原级数发散, 当 $x = e$ 时, n 充分大后

$$\begin{aligned}\frac{a_{n-1}}{a_n} &= \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1 - (e^{\frac{1}{n}} - 1)} \\ &= 1 + (e^{\frac{1}{n}} - 1) + O((e^{\frac{1}{n}} - 1)^2)\end{aligned}$$

又 $e^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$

于是有 $\frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

从而由高斯判别法知原级数发散, 综上所述, 当 $x = 2$ 及 $x > e$ 时, 原级数绝对收敛.

【2731】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}};$

解 $\forall x \in \mathbb{R}$, 当 n 足够大时, 有 $n+x > 0$, 于是我们可把该级数看作正项级数, 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}}{\frac{1}{n^x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

知当 $x > 1$ 时, 原级数绝对收敛, 当 $x \leq 1$ 时, 原级数发散.

【2732】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n + y^n} \quad (x > 0; y > 0);$

解 当 $0 < x < 1$ 时, 由

$$\frac{x^n y^n}{x^n + y^n} = \frac{x^n}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^n} < x^n,$$

知原级数绝对收敛.

当 $0 < y < 1$ 时, 同理, 原级数绝对收敛.

【2733】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + y^n} \quad (y \geq 0);$

解 令 $a_n = \frac{x^n}{n+y^n}$, $y \geqslant 0$,

(1) 当 $|x| < 1$ 时, 由

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{n+y^n} \leqslant |x|^n,$$

知原级数绝对收敛.

(2) 当 $x = 1$ 时,

① 当 $y > 1$, 由

$$|a_n| = \frac{1}{n+y^n} < \left(\frac{1}{y}\right)^n,$$

知原级数绝对收敛.

② 当 $0 \leqslant y \leqslant 1$, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+y^n} = 1,$$

知原级数发散.

(3) 当 $x = -1$ 时,

① 当 $y > 1$, 由

$$|a_n| = \frac{1}{n+y^n} < \left(\frac{1}{y}\right)^n,$$

知原级数绝对收敛.

② 当 $0 \leqslant y \leqslant 1$, 由

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+y^n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

知原级数条件收敛.

(4) 当 $|x| > 1$ 时,

① 当 $y = 0$, 由 $a_n = \frac{x^n}{n}$ 知原级数发散.

② 当 $y > 0$, 若 $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$, 即 $|x| < y$ 时, 由

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{n+y^n} < \left|\frac{x}{y}\right|^n,$$

知原级数绝对收敛,若

$$\left| \frac{x}{y} \right| \geq 1,$$

且 $0 < y \leq 1$ 时,由

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{n+y^n} > \frac{|x|^n}{n+1} \rightarrow \infty,$$

知原级数发散.

若 $\left| \frac{x}{y} \right| \geq 1$ 且 $y > 1$ 时,由

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{n+y^n} = \left| \frac{x}{y} \right|^n \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{y^n}} \rightarrow \infty,$$

知原级数发散,由此知当 $\left| \frac{x}{y} \right| \geq 1$ 且 $y > 0$ 时,原级数发散.

综上所述,我们有当 $|x| < 1, 0 \leq y < +\infty$, 当 $|x| = 1, y > 1$, 当 $|x| > 1, |x| < y$ 时,原级数绝对收敛. 当 $x = -1, 0 \leq y \leq 1$ 时,原级数条件收敛.

【2734】 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}};$

解 令 $a_n = \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}},$

设 $x \cdot y \neq 0$, 由

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}} \\ &= \sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{\max(|x|, |y|)}\right)^{n^2} + \left(\frac{|y|}{\max(|x|, |y|)}\right)^{n^2}} \\ & \quad \cdot [\max(|x|, |y|)]^n, \end{aligned}$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \max(|x|, |y|).$

于是当 $\max(|x|, |y|) < 1$ 时,级数绝对收敛,当 $\max(|x|, |y|) > 1$ 时,级数发散. 当 $\max(|x|, |y|) = 1$ 时, $a_n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ 时,故级数发散.

【2735】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y} \quad (x \geq 0);$

解 (1) 当 $0 \leq x < 1$ 时, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}}{\frac{x^n}{n^y}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^n)}{x^n} = 1,$$

知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$ 有相同的敛散性.

又 $\frac{x^n}{n^y} \leq n^{|y|} x^n$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{|y|} x^n} = x < 1$ 知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$ 绝对收敛, 进而原级数绝对收敛.

(2) 当 $x = 1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^y}$, 于是当 $y > 1$ 时收敛, 当 $y \leq 1$ 时发散.

(3) 当 $x > 1$ 时, 原级数的通项为

$$\frac{\ln(1+x^n)}{n^y} = \frac{\ln x^n \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)}{n^y} = \frac{\ln x}{n^{y-1}} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)}{n^y},$$

由(1)知, 当 $x > 1$ 时, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)}{n^y}$ 绝对收敛, 而对于

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n^{y-1}}$, 当 $y > 2$ 时, 收敛, 当 $y \leq 2$ 时发散, 于是当 $x > 1$,

$y > 2$ 时, 原级数绝对收敛, 综上所述原级数的绝对收敛域为

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x < 1, -\infty < y < +\infty\},$$

$$\{(x, y) \mid x = 1, y > 1\}$$

和 $\{(x, y) \mid x > 1, y > 2\}.$

【2736】 $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^n\left(x + \frac{y}{n}\right);$

解 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \tan^n \left(x + \frac{y}{n} \right) \right|} = |\tan x|.$$

知当 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ 时, $|\tan x| < 1$ 有原级数绝对收敛,

当 $|x - k\pi| \geq \frac{\pi}{4}$ 时, 由 $\tan^n \left(x + \frac{y}{n} \right) \rightarrow \infty$, 原级数发散.

【2737】 证明: 若在 $x = x_1$ 和在 $x = x_2 (|x_1| < |x_2|)$ 时, 罗朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛, 则这个级数在 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时也收敛.

证 由题意有 $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n x_1^n$ 和 $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n x_2^n$ 皆收敛, 于是 (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_1^{-n}$, (3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$, (4) $\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} x_2^{-n}$ 皆收敛. 由 (3) 知当 $|x| < |x_2|$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 由 (2) 知, 当 $\left| \frac{1}{x} \right| < \left| \frac{1}{x_1} \right|$, 即 $|x_1| < |x|$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 收敛, 于是, 当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 皆收敛, 即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛.

【2738】 确定罗朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$ 的收敛域并求出它的和.

解 把 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$ 分为两部分

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2^n} x^{-n}.$$

于是对于级数 (1), 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}} x^{n+1}}{\frac{n}{2^n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{2n} \cdot x \right| = \frac{|x|}{2},$$

知, 当 $|x| < 2$ 时, 级数(1) 收敛, 对级数(2) 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-\frac{n+1}{2^{n+1}}x^{-n-1}}{-\frac{n}{2^n}x^{-n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{2nx} \right| = \frac{1}{2|x|},$$

知, 当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时, 级数(2) 收敛.

因此, 当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时原级数收敛. 记级数(1) 的和为 $S_{(1)}(x)$, 级数(2) 的和为 $S_{(2)}(x)$,

$$\text{故 } S_{(2)}(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{-n} = -S_{(1)}\left(\frac{1}{x}\right),$$

当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ 皆收敛, 且

$$\begin{aligned} S_{(1)}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{2^{l+1}} x^{l+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \frac{x}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} x^l + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} \\ &= \frac{x}{2} S_{(1)}(x) + \frac{x}{2-x}, \end{aligned}$$

$$\text{于是有 } S_{(1)}(x) = \frac{\frac{x}{2-x}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2x}{(2-x)^2},$$

$$S_{(2)}(x) = -\frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{\left(2 - \frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{2x}{(2x-1)^2},$$

因此, 当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 有原级数的和为

$$S_{(1)}(x) + S_{(2)}(x) = \frac{6x(x^2 - 1)}{(2 - x)^2(2x - 1)^2}.$$

【2739】 确定牛顿级数的(绝对的与条件的)收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!}; (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \frac{x^{[n]}}{n!}; (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}.$$

其中 $x^{[n]} = x(x-1)\cdots[x-(n-1)]$

解 (1) 由题 2700 知, 当 $x \geq 0$ 时, 级数绝对收敛, 当 $-1 < x < 0$ 时, 级数条件收敛.

(2) 因为

$$\begin{aligned} x^{[n]} &= x(x-1)\cdots[x-(n-1)] \\ &= (-1)^{n-1}(n-1-x)(n-2-x)\cdots(2-x)(1-x)x \\ &\stackrel{t=-(1+x)}{=} -(-1)^{n-1}(n+t)(n-1+t)\cdots \\ &\quad (3+t)(2+t)(1+t), \end{aligned}$$

于是原级数可写为

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+t)(2+t)\cdots(n+t)}{n! n^p}.$$

由题 2699 知, 当 $p > t+1$ 时, 即 $p > -x$ 时, 原级数绝对收敛, 当 $x \in \mathbb{N}$ 时, 原级绝对收敛, 当 $-(1+x) < p \leq -x$ 时, 原级数条件收敛.

(3) 令 $t = -(1+y)$, 于是有

$$y^{[n]} = (-1)^n (1+t)(2+t)\cdots(n+t),$$

$$\text{令 } a_n = \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n},$$

当 $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{N}$ 时,

$$a_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 当 $y \notin \mathbb{N}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= -\frac{n+1}{n+1+t} \cdot \frac{1}{ex} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= -\frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{ex} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \end{aligned}$$

于是当 $|x| < 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{|x|} > 1,$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 当 $|x| > 1$ 时, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{|x|} < 1,$$

有当 n 充分大时有 $|a_n| < |a_{n+1}|$, 从而 a_n 不趋于零, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 当 $|x| = 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= \left[1 + \frac{1+y}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \cdot \left[1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= 1 + \frac{1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

从而当 $y > \frac{1}{2}$ 时, 由高斯判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛; 当 $y \leq \frac{1}{2}$ 时,

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 又 $|y| < \frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = -\frac{1}{x} \left[1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right], \quad (0 < \mu < 1)$$

于是据高斯判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为交错级数, 且

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) > 1 \quad (n \text{ 充分大时}),$$

于是 $|a_n|$ 单调下降, 而

$$|a_n| = |y| (1-y)(2-y) \cdots (n-1-y) \frac{e}{n^n}$$

$$\begin{aligned}
&= e |y| \cdot \frac{1-y}{n} \cdot \frac{2-y}{n} \cdots \frac{n-1-y}{n} \cdot \frac{1}{n} \\
&< \frac{e |y|}{n} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

故由莱布尼兹判别法知当 $x = 1, |y| < \frac{1}{2}$ 时, 级数条件收敛.

综上所述, 该级数的绝对收敛域为

$$\{(x, y) \mid |x| < 1, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\{(x, y) \mid |x| = 1, y > \frac{1}{2}\},$$

$$\{(x, y) \mid -\infty < x < \infty, y \in \mathbb{N}\}.$$

该级数条件收敛域为

$$\{(x, y) \mid x = 1, |y| < \frac{1}{2}\}.$$

【2740】 证明: 若狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $x = x_0$ 时收敛, 则这个级数在 $x > x_0$ 时也收敛.

证 由

$$\frac{a_n}{n^x} = \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}},$$

知当 $x > x_0$ 时 $\left(\frac{1}{n^{x-x_0}}\right)$ 关于 n 单调递减且趋于零, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛,

于是由阿贝尔判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$ 收敛. 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $x > x_0$ 时也收敛.

【2741】 证明: 序列

$$f_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

在 X 集上的一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in X} \gamma_n(x) \right\} = 0,$$

其中 $\gamma_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

证 充分性. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in X} \gamma_n(x) \right\} = 0$ 知, 任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N(\epsilon)$

> 0 , 当 $n > N(\epsilon)$ 时, 有

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

于是, 任意 $x \in X$, 只要 $n > N(\epsilon)$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

故 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于 $f(x)$.

必要性: 由 $f_n(x)$ 在 X 上一致收敛到 $f(x)$ 知, 任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N(\epsilon) > 0$, 当 $n > N(\epsilon)$ 时, 任 $x \in X$, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

因此, 当 $n > N(\epsilon)$ 时, 有 $\sup_{x \in X} \{f_n(x) - f(x)\} \leq \epsilon$, 进一步,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \right\} = 0$$

【2742】 序列 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$

(1) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 收敛;

(2) 在每一个有穷区间 $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$ 一致收敛;

(3) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 一致收敛.

分别意味着什么?

解 (1) 对于任意的 $\epsilon > 0$, 任 $x \in (x_0, +\infty)$, 总存在一个正数 $N = N(\epsilon, x)$ (N 与 ϵ, x 有关), 当 $n > N$ 时, 总有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上收敛于 $f(x)$.

(2) 对每一个 $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$, 如果对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $N = N(\epsilon, a, b)$ (N 与 ϵ, a, b 有关), 当 $n > N$ 时, 任 $x \in (a, b)$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 (a, b) 上一致收敛.

(3) 任 $\epsilon > 0$, 存在 $N = N(\epsilon) > 0$ (N 只与 ϵ 有关), 当 $n > N$ 时, 任 $x \in (x_0, +\infty)$ 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称 $f_n(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上一致收敛.

【2743】 对于序列

$$f_n(x) = x^n (n = 1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1).$$

确定其项的最小号码 $N = N(\epsilon, x)$, 使得从该项起, 序列各项在点 x 与极限函数的偏差不超过 0.001, 若

$$x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \dots$$

问这个序列在 $(0, 1)$ 区间能一致收敛吗?

解 由 $0 < x < 1$ 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, 于是由

$$|x^n - 0| < \epsilon \quad \epsilon = 0.001,$$

有 $n > \frac{\lg \epsilon}{\lg x}$,

所以最小号码为

$$N = \left[\frac{\lg \epsilon}{\lg x} \right] = \left[-\frac{3}{\lg x} \right],$$

当 $x = \frac{1}{10}$ 时, $N = 3$,

当 $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 时, $N = 6$,

.....

当 $x = \frac{1}{\sqrt[m]{10}}$ 时, $N = 3m$.

由上述计算知, 当 $x = \frac{1}{\sqrt[m]{10}} \rightarrow 1 (m \rightarrow \infty)$ 时有

$$\frac{\lg \epsilon}{\lg x} \rightarrow +\infty \quad (0 < \epsilon < 1, x \rightarrow 1^-),$$

于是, 不能找到一个公共的 N (仅与 ϵ 有关), 使当 $n > N$ 时, 对任 $x \in (0, 1)$, 皆有 $x^n < \epsilon$, 从而

$$f_n(x) = x^n, (n = 1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1),$$

在区间 $(0, 1)$ 内不一致收敛.

【2744】 应该取级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ 的多少项才能使部分和

$S_n(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 时与级数和之差小于 ϵ ? 设:

(1) $\epsilon = 0.1$; (2) $\epsilon = 0.01$; (3) $\epsilon = 0.001$, 求出 n 的数值

解 由

$$\left| \frac{\sin nx}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2},$$

知原级数绝对收敛, 令其和为

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)},$$

部分和为 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k(k+1)},$

它们之间的误差为

$$\Lambda_n(x) = |S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right|.$$

下面对 $\Lambda_n(x)$ 作估计.

$$\begin{aligned} \text{由 } \Lambda_n(x) &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{|\sin kx|}{k(k+1)} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \right) = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

即 $\Lambda_n(x) < \frac{1}{n+1},$

于是令 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ 时, 也就是 $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$ 时, 有 $\Lambda_n(x) < \epsilon$, 从而令

$N_0 = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 若记 $\left\{ \frac{1}{\epsilon} \right\}$ 为 $\frac{1}{\epsilon}$ 的小数部分, 则有

$$\frac{1}{\epsilon} = \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + \left\{ \frac{1}{\epsilon} \right\},$$

于是当 $n > \frac{1}{\epsilon} - 1 = \left[\frac{1}{\epsilon} \right] - \left(\left\{ 1 - \frac{1}{\epsilon} \right\} \right)$ 时,

即 $n > N_0$ 时, 有 $\Lambda_n(x) < \epsilon$, 从而该题相应的 n 如下:

ϵ	0.1	0.01	0.001
N_0	10	100	1000

【2745】 怎样的 n 值能保证以下不等式成立?

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0.001 \quad (0 \leq x \leq 10).$$

解 因为

$$e^x = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, 0 < \theta < 1,$$

于是
$$\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{e^{10}}{(n+1)!} 10^{n+1}.$$

现令
$$\frac{e^{10}}{(n+1)!} 10^{n+1} < 0.001,$$

有
$$e^{10} 10^{n+4} < (n+1)!,$$

两边的对数有

$$10 + (n+4)\ln 10 < \sum_{k=2}^{n+1} \ln k, \quad (1)$$

令
$$p_n = \sum_{k=2}^{n+1} \ln k,$$

于是
$$p_n > \int_1^{n+1} \ln t dt = (n+1)\ln(n+1) - n.$$

若有
$$(n+1)\ln(n+1) - n > 10 + (n+4)\ln 10, \quad (2)$$

则 ① 式成立, 也就是

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0.001.$$

当 $n = 39$ 时, ② 式成立, 因此, 当 $n = 39$ 时, 能保证

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0.001 \quad (0 \leq x \leq 10).$$

在所指定的区间研究序列的一致收敛性(2746 ~ 2763).

【2746】 $f_n(x) = x^n$; (1) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$; (2) $0 \leq x \leq 1$.

解 (1) 由 $x \in [0, \frac{1}{2}]$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 = f(x),$$

任 $\epsilon > 0$, 由

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

知, 可令 $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \epsilon$, 即 $n > \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln 2}$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

取 $N = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln 2} \right\rceil$,

于是当 $n > N$ 时, 任 $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| < \epsilon,$$

因此, $f_n(x) = x^n$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛于零.

(2) 由 $x \in [0, 1]$ 知

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

取 $\epsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 令 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ 有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)\right| = \frac{1}{3} > \epsilon_0,$$

于是, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛, 但不一致收敛.

【2747】 $f_n(x) = x^n - x^{n+1}; 0 \leq x \leq 1$.

解 由 $x \in [0, 1]$ 知

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [x^n - x^{n+1}] \\ &= \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 0, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

又令 $g(x) = |f_n(x) - f(x)| = x^n - x^{n+1}$,

由 $g'(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x)$,

令 $g'(x) = 0$ 有 $x = \frac{n}{n+1}$, 即 $x \in (0, 1)$, $g(x)$ 有唯一驻点. 易知

$x \in [0, 1]$ 时 $g(x)$ 在 $x = \frac{n}{n+1}$ 处达到最大值, 于是有

$$\begin{aligned} g(x) &\leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1}, \text{ 任给 } \epsilon > 0, \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{1}{n+1} < \epsilon,$$

即 $n > \frac{1}{\epsilon}$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

从而的 $N = \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$, 当 $n > N$ 时, 任意 $x \in [0, 1]$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于零.

【2748】 $f_n(x) = x^n - x^{2n}; 0 \leq x \leq 1$

解 由 $x \in [0, 1]$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

又 $|f_n(x) - f(x)| = x^n - x^{2n},$

今取 $\epsilon_0 \in \left(0, \frac{2}{9}\right), \forall n \in \mathbb{N},$ 令 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ 有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)\right| = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} = \frac{2}{9} > \epsilon_0,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛, 但不一致收敛.

【2749】 $f_n(x) = \frac{1}{x+n}; 0 < x < +\infty.$

解 由 $x \in (0, \infty)$ 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

而

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+n} < \frac{1}{n},$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

从而取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, $\forall x \in (0, +\infty)$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+n} < \varepsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内一致收敛于零.

$$\text{【2750】 } f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}; 0 \leq x \leq 1.$$

解 由 $x \in [0, 1]$ 知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n+x} \\ &= \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x, & x \in (0, 1]. \end{cases} = x = f(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{nx}{1+n+x} - x \right| \\ &= \frac{x+x^2}{1+n+x} < \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

任意 $\varepsilon > 0$, 令 $\frac{2}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{2}{\varepsilon}$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

今取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right]$,

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 x .

$$\text{【2751】 } f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n};$$

$$(1) 0 \leq x \leq 1 - \varepsilon; \quad (2) 1 - \varepsilon \leq x \leq 1 + \varepsilon;$$

(3) $1 + \epsilon \leq x < +\infty$, 其中 $\epsilon > 0$.

解 (1) 由

$$x \in [0, 1 - \epsilon],$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n} = 0 = f(x),$$

$$\text{又} \quad |f_n(x) - f(x)| = \frac{x^n}{1 + x^n} \leq (1 - \epsilon)^n, \forall \delta > 0.$$

令 $(1 - \epsilon)^n < \delta$, 即 $n > \frac{\lg \delta}{\lg(1 - \epsilon)}$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta,$$

现令 $N = \left[\frac{\lg \delta}{\lg(1 - \epsilon)} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 任 $x \in [0, 1 - \epsilon]$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta,$$

于是, $f_n(x)$ 在 $[0, 1 - \epsilon]$ 上一致收敛于 0.

(2) 由 $x \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$, 有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 1 - \epsilon \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & 1 < x \leq 1 + \epsilon. \end{cases}$$

现取 $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{4})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 令 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$, 有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right) \right| = \frac{1}{4} > \epsilon_0,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$ 上收敛, 但不一致收敛.

【2752】 $f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2 x^2}$; (1) $0 \leq x \leq 1$;

(2) $1 < x < +\infty$.

解 (1) 由 $x \in [0, 1]$ 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

现令 $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{2})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 取 $x = \frac{1}{2n}$, 有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right) \right| = \frac{2n \cdot \frac{1}{2n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{4n^2}} = \frac{4}{5} > \epsilon_0,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

(2) 由 $x \in (1, +\infty)$ 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

$$\text{又} \quad |f_n(x) - f(x)| = \frac{2nx}{1 + n^2 x^2} < \frac{2nx}{n^2 x^2} < \frac{2}{n},$$

于是任 $\epsilon > 0$, 令 $\frac{2}{n} < \epsilon$, 即 $n > \frac{2}{\epsilon}$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

今取 $N = \left[\frac{2}{\epsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 任 $x \in (1, +\infty)$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致收敛.

$$\text{【2753】} \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}; \quad -\infty < x < +\infty.$$

解 由 $x \in (-\infty, +\infty)$ 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = |x| = f(x),$$

$$\text{又} \quad |f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right|$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} < \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n},$$

于是任 $\epsilon > 0$, 令 $\frac{1}{n} < \epsilon$ 即 $n > \frac{1}{\epsilon}$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

现取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, $\forall x \in \mathbb{R}$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

【2754】 $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right); 0 < x < +\infty.$

解 由 $x \in (0, +\infty)$ 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(x + \frac{1}{n} - x\right)}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \triangleq f(x),$$

今取 $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{18}\right)$, 任 $n \in \mathbb{N}$, 取 $x = \frac{1}{n}$ 有

$$\begin{aligned} \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| &= \left|n\left(\sqrt{\frac{2}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}}\right| \\ &= \sqrt{n} \left|\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right| = \sqrt{n} \frac{\sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{2} + 1)^2} \\ &> \frac{1}{18} \sqrt{n} > \varepsilon_0. \end{aligned}$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛, 但不一致收敛.

【2755】 (1) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}; \quad -\infty < x < +\infty;$

(2) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}; \quad -\infty < x < +\infty.$

解 由 $x \in (-\infty, +\infty)$ 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

而 $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leq \frac{1}{n},$

于是任 $\varepsilon > 0$, 令 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

现取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n > N$ 时, 任 $x \in \mathbb{R}$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) 由 $x \in (-\infty, +\infty)$ 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

现取 $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, 任 $n \in \mathbb{N}$, 令 $x = \frac{n\pi}{2}$, 有

$$\left| f_n\left(\frac{n\pi}{2}\right) - f\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right| = \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = 1 > \varepsilon_0,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛, 但不一致收敛.

【2756】 (1) $f_n(x) = \arctan nx$; $0 < x < +\infty$;

(2) $f_n(x) = x \arctan nx$, $0 < x < +\infty$.

解 (1) 由 $x \in (0, +\infty)$ 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan nx = \frac{\pi}{2} = f(x).$$

取 $\varepsilon_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$, 任 $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{令 } x = \frac{1}{n},$$

有 $\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \arctan 1 - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{4} > \varepsilon_0,$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛, 但不一致收敛.

(2) 由 $x \in (0, +\infty)$ 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}x = f(x).$$

又 $|f_n(x) - f(x)| = x \left| \arctan nx - \frac{\pi}{2} \right|$

$$= x \left| -\arctan \frac{1}{nx} \right| \leq x \cdot \frac{1}{nx} = \frac{1}{n},$$

于是任 $\varepsilon > 0$, 令 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

现取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 任 $x \in (0, +\infty)$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

【2757】 $f_n(x) = e^{n(x-1)}; \quad 0 < x < 1.$

解 由 $x \in (0, 1)$ 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

现令 $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{\sqrt{e}})$, 任 $n \in \mathbb{N}$, 取 $x = 1 - \frac{1}{2n}$, 有

$$\left| f_n\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - f\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \right| = e^{n(1 - \frac{1}{2n} - 1)} = e^{-\frac{1}{2}} > \varepsilon_0,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上收敛, 但不一致收敛.

【2758】 $f_n(x) = e^{-(x-n)^2};$

(1) $-l < x < l$, 其中 l 为任意正数;

(2) $-\infty < x < +\infty$.

解 (1) 由 $x \in (-l, l)$ 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

又 $|f_n(x) - f(x)| = e^{-(x-n)^2} \leq e^{-(n-l)^2},$

于是任 $\varepsilon > 0$, 令

$$e^{-(n-l)^2} < \varepsilon,$$

即 $n > l + \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

从而令 $N = \left[l + \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \right],$

当 $n > N$ 时, $\forall x \in (-l, l)$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-l, l)$ 上一致收敛.

(2) 由 $x \in (-\infty, +\infty)$ 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

令 $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, 任 $n \in \mathbb{N}$, 取 $x = n$, 有

$$|f_n(x) - f(n)| = 1 > \varepsilon_0,$$

因此 $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛, 但不一致收敛.

$$\text{【2759】 } f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}; \quad 0 < x < 1.$$

解 由 $x \in (0, 1)$ 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0,$$

令 $y = \frac{x}{n}$, 而

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y \ln y = \lim_{y \rightarrow 0^+} (-y) = 0,$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} = \lim_{y \rightarrow 0^+} y \ln y = 0 = f(x).$$

$$\text{又由 } |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right|,$$

知, 任 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < \frac{x}{n} < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right| < \varepsilon,$$

现令 $N = \left[\frac{1}{\delta} \right]$, 当 $n > N$ 时, 有 $\frac{1}{n} < \delta$, 于是任 $x \in (0, 1)$, 有

$$0 < \frac{x}{n} < \frac{1}{n} < \delta,$$

$$\text{从而 } |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right| < \varepsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上一致收敛.

$$\text{【2760】 } f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n;$$

(1) 在有穷区间 (a, b) ; (2) 在 $(-\infty, +\infty)$ 区间.

解 (1) 由 $x \in (a, b)$ 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} \right\}^x = e^x \quad (x \neq 0),$$

若 $x = 0$ 时, $f_n(x) = 1$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^x, x \in (a, b),$$

令 $M = \max\{|a|, |b|\}$, 由泰勒公式

$$\begin{aligned} \ln f_n(x) &= n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \\ &= n \left[\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta x}{n} \right)^3} \cdot \frac{x^3}{n^3} \right] \\ &= x - \frac{x^2}{2n} + \frac{1}{3 \left(1 + \frac{\theta x}{n} \right)^3} \cdot \frac{x^3}{n^2}, \end{aligned}$$

其中 $\theta \in (0, 1)$, $\left| \frac{\theta x}{n} \right| \leq \frac{M}{n}$, $|x^3| \leq M^3$,

从而 $\ln f_n(x) = x - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

于是有 $f_n(x) = e^{x - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e^x \left[1 - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$,

从而存在 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| = e^x \left| -\frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| \leq \frac{M^2 e^M}{n},$$

任 $\varepsilon > 0$, 令 $\frac{M^2 e^M}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{M^2 e^M}{\varepsilon}$ 时有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

于是现记

$$N_1 = \max\left(N, \left\lceil \frac{M^2 e^M}{\varepsilon} \right\rceil\right),$$

则当 $n > N_1$ 时, 任 $x \in (a, b)$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛.

(2) $x \in (-\infty, +\infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^x = f(x)$,

由 $|f_n(x) - f(x)| = \left| \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n - e^x \right|,$

知,取 $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2})$, 任 $n \in \mathbb{N}$, 令 $x = 2n$, 有

$$\begin{aligned} |f_n(2n) - f(2n)| &= |3^n - e^{2n}| \\ &= 3^n \left(\left(\frac{e^2}{3} \right)^n - 1 \right) > \varepsilon_0, \end{aligned}$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛, 但不一致收敛.

【2761】 $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1); 1 \leq x \leq a$.

解 由 $x \in [1, a]$ 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x = f(x),$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad |f_n(x) - f(x)| &= |n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - \ln x| \\ &= |n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - n \ln(1 + (x^{\frac{1}{n}} - 1))| \\ &= |n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - n(x^{\frac{1}{n}} - 1) \\ &\quad + \frac{n}{2}(x^{\frac{1}{n}} - 1)^2 + nO((x^{\frac{1}{n}} - 1)^3)| \\ &= \frac{1}{2n} \left[\frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right]^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) < \frac{(\ln a)^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

上述不等式是在取定适当的 $N_1 > 0$ 后, 当 $n > N_1$ 时成立. 于是任 $\varepsilon > 0$, 存在 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, 有

$$\frac{(\ln a)^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) < \varepsilon,$$

现令 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时, 任 $x \in [1, a]$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[1, a]$ 上一致收敛.

【2762】 $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}; 0 \leq x \leq 2$.

解 由 $x \in [0, 2]$ 知, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $1 \leq \sqrt[n]{1+x^n} \leq \sqrt[n]{2}$,

当 $x \in (1, 2]$ 时, $x < x \sqrt[n]{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^n} \leq x \sqrt[n]{2}.$

从而 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

于是

1° 当 $x \in [0, 1]$ 时,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |\sqrt[n]{1+x^n} - 1| \\ &= \frac{x^n}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}} + (1+x^n)^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + (1+x^n)^{\frac{1}{n}} + 1} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

2° 当 $x \in (1, 2]$ 时,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |\sqrt[n]{1+x^n} - x| \\ &= \frac{1}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}} + x(1+x^n)^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + x^{n-2} \cdot (1+x^n)^{\frac{1}{n}} + x^{n-1}} \\ &< \frac{1}{nx^{n-1}} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

进而任 $\varepsilon > 0$, 令 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 时有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

故令 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n > N$ 时, 任 $x \in [0, 2]$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 2]$ 上一致收敛.

$$\text{【2763】 } f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{若 } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x\right), & \text{若 } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}; \\ 0, & \text{若 } x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$

在 $0 \leq x \leq 1$ 区间.

解 当 $x = 0$ 时, $f_n(x) = 0$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0,$$

当 $x \in [0, 1]$, 但 $x \neq 0$ 时, 即 $x > 0$, 从而任 $\epsilon > 0$, 存在 $N > \frac{1}{\epsilon}$,

有 $\frac{2}{N} \leq x$, 进一步当 $n > N$ 时, $\frac{2}{n} < \frac{2}{N} \leq x$, 故 $f_n(x) = 0$, 因此

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

现令 $\epsilon_0 \in (0, 1)$, 任 $n \in \mathbb{N}$, 取 $x = \frac{1}{n^2}$, 有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) - f\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1 > \epsilon_0,$$

从而, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛, 但不一致收敛.

【2764】 设 $f(x)$ 为定义在区间 $[a, b]$ 的任意函数, 且

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n(x) \rightarrow f(x) (a \leq x \leq b)$.

证 由

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} |[nf(x)] - nf(x)| \leq \frac{1}{n},$$

知对任意 $\epsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$, 当 $n > N$ 时, 对任 $x \in [a, b]$, 皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

【2765】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 具有连续导数 $f'(x)$ 且

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right].$$

证明: 在 $a \leq x \leq \beta$ 区间上 $f_n(x) \rightarrow f'(x)$, 其中 $a < \alpha < \beta < b$.

证 令 $a < \alpha' < \alpha < \beta < \beta' < b$, 在 $[\alpha', \beta']$ 上, $f_n(x)$ 当 n 充分大后在 $[\alpha', \beta']$ 上有连续的导函数, 故由拉格朗日中值定理有

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] \\ &= nf'\left(x + \frac{\theta}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = f'\left(x + \frac{\theta}{n}\right) \quad (0 < \theta < 1), \end{aligned}$$

而 $f'(x)$ 在 $[\alpha', \beta']$ 上一致连续, 于是任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意 $x', x'' \in [\alpha', \beta']$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有 $|f'(x') - f'(x'')| < \delta$, 现令 $N = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$, 且对 $x \in [\alpha, \beta]$, 只要 N 足够大, 就有 x 与 $x + \frac{\theta}{n}$ 皆属于 $[\alpha', \beta']$, 从而任 $x \in [\alpha, \beta]$, 皆有

$$|f_n(x) - f'(x)| = \left|f'\left(x + \frac{\theta}{n}\right) - f'(x)\right| < \epsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

【2766】 设

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right),$$

其中 $f(x)$ 为在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的连续函数. 证明: 序列 $f_n(x)$ 在任何有穷区间 $[a, b]$ 一致收敛.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad F(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right) \\ &= \int_x^{x+1} f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} f(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right) \quad (0 < \theta_i < 1, i = 0, 1, \dots, n-1), \end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 在 $[a, b+1]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b+1]$ 上一致连续, 于是任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $x', x'' \in [a, b+1]$ 有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon,$$

$$\text{现令} \quad N = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1,$$

则当 $n > N, a \leq x \leq b$ 时, 有

$$\left|\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right) - \left(x + \frac{i}{n}\right)\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta,$$

且 $x + \frac{i}{n} \in [a, b+1], x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n} \in [a, b+1]$
 $(i = 0, 1, \dots, n-1),$

从而 $|F(x) - f_n(x)|$
 $\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left| f\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right) - f\left(x + \frac{i}{n}\right) \right| < \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \epsilon$
 $= \epsilon,$

因此, $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

研究下列级数的收敛性质(2767 ~ 2773).

【2767】 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$

(1) 在区间 $|x| < q$; 其中 $q < 1$;

(2) 在区间 $|x| < 1$.

解 (1) 由 $|x| < q, q < 1$ 知, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $|x| < q < 1$ 内绝对
 且一致收敛.

(2) 由

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

知当 $|x| < 1$ 时, 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}.$$

现令 $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{3})$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 取 $x = \frac{1}{n^{1/\sqrt{3}}}$ 有

$$\begin{aligned} \left| S_n\left(\frac{1}{n^{1/\sqrt{3}}}\right) - S\left(\frac{1}{n^{1/\sqrt{3}}}\right) \right| &= \left| \frac{1 - \frac{1}{n^{1/\sqrt{3}}}}{1 - \frac{1}{n^{1/\sqrt{3}}}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{n^{1/\sqrt{3}}}} \right| \\ &= \frac{\frac{1}{n^{1/\sqrt{3}}}}{1 - \frac{1}{n^{1/\sqrt{3}}}} = \frac{n^{1/\sqrt{3}}}{3(n^{1/\sqrt{3}} - 1)} > \frac{1}{3} > \epsilon_0, \end{aligned}$$

因此, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $|x| < 1$ 内收敛, 但不一致收敛.

【2768】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, 在区间 $-1 \leq x \leq 1$.

解 由 $x \in [-1, 1]$ 知 $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上绝对收敛, 且一致收敛.

【2768. 1】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, 在区间 $(0, +\infty)$.

解 因为

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

又
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!},$$

由
$$|S_n(x) - e^x| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x},$$

$$x \in (0, +\infty), 0 < \theta < 1,$$

知, 取 $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 取 $x = n+1$, 有

$$|S_n(n+1) - e^{(n+1)}| = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta(n+1)} > 1 > \varepsilon_0,$$

因此, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛, 但不一致收敛.

【2769】 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$, 在区间 $0 \leq x \leq 1$.

解 由

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=0}^n (1-x)x^k \\ &= (1-x) \sum_{k=0}^n x^k = 1 - x^{n+1}, \end{aligned}$$

有
$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

取 $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2})$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 令 $x = \frac{1}{n+1\sqrt{2}}$ 有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n+1\sqrt{2}}\right) - S\left(\frac{1}{n+1\sqrt{2}}\right) \right| = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0,$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上收敛, 但不一致收敛.

【2770】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right); -1 \leq x \leq 1.$

解 由

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

知, 当 $x \in [-1, 1]$, 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = x,$$

又 $|S_n(x) - S(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$

于是 $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, $\forall x \in [-1, 1]$, 皆有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛.

【2771】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}; 0 < x < +\infty.$

解 由

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{nx+1}, \end{aligned}$$

知当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1.$$

现取 $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2})$. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 令 $x = \frac{1}{n}$, 有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| 1 - \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0,$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛, 但不一致收敛.

【2772】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}; 0 < x < +\infty.$

解 由

$$\left| \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \right| < \frac{1}{n^2} \quad (x > 0),$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛知原级数在 $(0, +\infty)$ 上绝对并一致收敛.

【2773】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}.$

(1) $0 \leq x \leq \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$; (2) $\varepsilon \leq x < +\infty$.

解 $x = 0$ 时, 原级数收敛于零, $x > 0$ 时, 令

$$u_n(x) = \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} > 0,$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{1+(n+1)x} \right] = 0 < 1,$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛 ($x \geq 0$), 又

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n u_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{kx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(1+x)\cdots(1+(k-1)x)} - \frac{1}{(1+x)\cdots(1+kx)} \right] \\
&= 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \\
&\rightarrow 1 \quad (x > 0, n \rightarrow \infty),
\end{aligned}$$

于是有 $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

(1) 由 $x \in (0, \varepsilon)$ 有

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},$$

现取 $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, 任 $n \in \mathbb{N}$, 因为

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} = 1,$$

于是存在 $\delta = \delta(\varepsilon_0)$, 当 $0 < x < \delta$, 有

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} > \varepsilon_0,$$

现取 $x_0 \in (0, \delta)$, 有

$$\frac{1}{(1+x_0)(1+2x_0)\cdots(1+nx_0)} > \varepsilon_0,$$

从而 $|S_n(x_0) - S(x_0)| > \varepsilon_0$,

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $0 \leq x \leq \varepsilon$ 上不一致收敛.

(2) 当 $x \in [\varepsilon, \infty)$ 时, 由于

$$\begin{aligned}
|u_n(x)| &= \left| \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \right| < \frac{nx}{(1+x)^n} \\
&= \frac{nx}{1+nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^n} \\
&< \frac{nx}{\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3} \quad (n \geq 3)
\end{aligned}$$

$$= \frac{6}{(n-1)(n-2)x^2} < \frac{6}{(n-2)^2\epsilon^2},$$

而 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{6}{(n-2)^2\epsilon^2}$ 收敛, 故由维尔斯特拉斯判别法知原级数在 $[\epsilon, +\infty)$ 上绝对且一致收敛.

【2774】 利用维尔斯特拉斯检验, 证明下列函数级数在指定区间的一致收敛性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}, -2 < x < +\infty;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}, 0 \leq x < +\infty;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}, |x| < +\infty;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}), \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}, |x| < a, \text{ 其中 } a \text{ 为任意正数};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, |x| < +\infty;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, |x| < +\infty;$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, |x| < +\infty;$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right), |x| < a;$$

$$(11) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, 0 \leq x < +\infty;$$

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2x}{x^2 + n^2}, |x| < +\infty.$$

证 (1) 由 $\left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) 由

$$\left| \frac{(-1)^n}{x + 2^n} \right| < \frac{1}{2^n - 2}, (\text{这里 } n \geq 2, x > -2),$$

而 $\frac{1}{2^n - 2} \leq \frac{1}{2^n - 2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}},$

又 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上一致收敛.

(3) $x=0$ 时, 级数收敛于零, 当 $x>0$ 时, 由 $1+n^4x^2 \geq 2n^2x$, 有 $\left| \frac{x}{1+n^4x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

(4) 由 $|x| < +\infty$, 且 $1+n^5x^2 \geq 2n^{\frac{5}{2}}x$, 有

$$\left| \frac{nx}{1+n^5x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(5) 由 $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}) \right| &\leq \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(|x|^n + |x|^{-n}) \\ &\leq \frac{2^{n+1} \cdot n^2}{\sqrt{n!}}, \end{aligned}$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+2}(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{2^{n+1}n^2}{\sqrt{n!}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^2}{n^2 \sqrt{n+1}} = 0 < 1,$$

于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} n^2}{\sqrt{n!}}$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n})$ 当 $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$ 时一致收敛.

(6) 当 $n = 2m$ 时, $u_{2m} = \frac{x^{2m}}{m!}$, 由 $|x| < a$, 有

$$\left| \frac{x^{2m}}{m!} \right| < \frac{a^{2m}}{m!},$$

又 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{2m+2}}{(m+1)!}}{\frac{a^{2m}}{m!}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^2}{m+1} = 0 < 1$,

于是 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{2m}}{m!}$ 收敛. 当 $n = 2m+1$ 时

$$u_{2m+1} = \frac{x^{2m+1}}{m!} \left| \frac{x^{2m+1}}{m!} \right| < \frac{a^{2m+1}}{m!},$$

类似地 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{2m+1}}{m!}$ 收敛.

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2m}(x)$ 和 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{2m+1}(x)$ 在 $|x| < a$ 上一致收敛,

从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$ 在 $|x| < a$ 上一致收敛.

(7) 由 $\left| \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛, 因此级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$ 在 $|x| < +\infty$ 上一致收敛.

(8) 由 $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(9) 由 $\left| \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(10) 由 $|x| < a$ 有

$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right) = \frac{x^2}{n \ln^2 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \text{ 充分大}),$$

又 $\left|\frac{x^2}{n \ln^2 n}\right| \leq \frac{a^2}{n \ln^2 n}$, 由题 2619 知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n \ln^2 n}$ 收敛, 又 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 也收敛,

因此, $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$ 在 $(-a, a)$ 上一致收敛.

(11) 由 $x > 0$ 有 $e^x > 1 + nx + \frac{n^2 x^2}{2} > \frac{n^2 x^2}{2}$, 于是 $e^{-nx} < \frac{2}{n^2 x^2}$, 从而 $|x^2 e^{-nx}| < \frac{2}{n^2}$, 当 $x = 0$ 时, 显然 $|x^2 e^{-nx}| < \frac{2}{n^2}$ 仍成立,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在 $x \geq 0$ 上一致收敛.

(12) 由 $x^2 + n^3 \geq 2n^{\frac{3}{2}} |x|$, 有 $\left|\frac{2x}{x^2 + n^3}\right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 又存在 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时

$$\begin{aligned} \left|\arctan \frac{2x}{x^2 + n^3}\right| &= \left|\frac{2x}{x^2 + n^3} + O\left(\left(\frac{2x}{x^2 + n^3}\right)^2\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 皆收敛, 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{x^2 + n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

研究下列函数级数在指定区间的一致收敛性(2775 ~ 2782).

【2775】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; (1) 在区间 $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$, 这里 $\varepsilon > 0$;

(2) 在区间 $0 \leq x \leq 2\pi$.

解 (1) 由 $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) 知

$$\left|\sum_{k=1}^n \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}},$$

又 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 趋于零, 由狄利克雷检验法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ 上一致收敛.

(2) 由题 2698 知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上条件收敛, 下证该级数在 $[0, 2\pi]$ 上不一致收敛.

用反证法. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛, 令

$$U_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \quad (n = 1, 3, \dots),$$

则任 $\epsilon > 0$, 存在 N_1 (与 x 无关), 当 $n \geq N_1$ 时, 对任 $x \in [0, 2\pi]$, 皆有

$$|U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + \dots + U_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

其中 p 为任意自然数.

现取 $N_2 \geq 2N_1$, 令

$$n_0 = \max\left(\left[\frac{N_2}{2}\right], \left[\frac{N_2+1}{2}\right]\right),$$

有 $n_0 \geq N_1$. 取 p 满足 $n_0 + p = N_2 + 1$, 于是有

$$|U_{n_0+1}(x) + U_{n_0+2}(x) + \dots + U_{n_0+p}(x)| < \epsilon,$$

即 $\left| \sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n < N_2+2} U_n(x) \right| < \epsilon \quad (\forall x \in [0, 2\pi]), \quad ①$

现取 $x_0 = \frac{1}{N_2+2} \cdot \frac{\pi}{2}$, ① 式成立, 又当 $\frac{N_2}{2} + 1 \leq n < N_2 + 2$ 时,

有 $0 < nx_0 < \frac{\pi}{2}$, 从而

$$\sin nx_0 \geq nx_0 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{n}{N_2+2},$$

于是 $U_n(x_0) = \frac{\sin nx_0}{n} \geq \frac{1}{N_2+2}$, 进而有

$$\begin{aligned}\sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n < N_2+2} U_n(x_0) &\geq \frac{1}{N_2+2} \sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n < N_2+2} 1 \\ &\geq \frac{1}{N_2+2} \cdot \frac{1}{2}(N_2+2) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

与①矛盾,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上条件收敛,但不一致收敛.

【2776】 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}; 0 < x < +\infty.$

解 令 $a_n(x) = 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$, 由 $x \in (0, +\infty)$ 知

$$|a_n(x)| \leq 2^n \cdot \frac{1}{3^n x} = \frac{1}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 绝对收敛, 下面证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$

在 $(0, +\infty)$ 内不一致收敛, 用反证法, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内一致收敛, 于是任 $\epsilon \in (0, 1)$, 存在 $N = N(\epsilon)$, 当 $n \geq N$ 时, 对任 $x \in (0, +\infty)$, 任 $p \in \mathbb{N}$ 皆有

$$|a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

现取 $P = 1, n = N$,

则 $|a_{n+1}(x)| < \epsilon < 1$.

今取 $x_0 = \frac{2}{3^{N+1}\pi} \in (0, +\infty)$,

则有 $|a_{n+1}(x_0)| < 1$,

但
$$\begin{aligned}a_{N+1}(x_0) &= 2^{N+1} \sin \frac{1}{3^{N+1}x_0} \\ &= 2^{N+1} \sin \frac{\pi}{2} = 2^{N+1} > 1,\end{aligned}$$

矛盾, 从而原级数在 $(0, +\infty)$ 上收敛, 但不一致收敛.

【2777】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}; 0 < x < +\infty.$

提示: 评估级数的余项.

解 由 $x \in (0, +\infty)$ 知 $\frac{1}{n+x} < \frac{1}{n}$, 从而 $\left\{ \frac{1}{n+x} \right\}$ 单调一致趋于零, 又 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$, 故由狄里克雷判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

【2778】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}; 0 \leq x \leq 2\pi.$

解 由 $x \in [0, 2\pi], n \geq 2$ 知

$$0 < \frac{1}{n+\sin x} < \frac{1}{n-1},$$

于是 $\left\{ \frac{1}{n+\sin x} \right\}$ 对每一个 $x \in [0, 2\pi]$ 单调递减且一致于零, 又 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$, 因此, 原级数在 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛.

【2779】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}; |x| \leq 10.$

解 由 $|x| \leq 10$ 知

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^{-10}}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}},$$

又
$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}} > \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2+e^x}},$$

于是 $\left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}} \right\}$ 对每一个 $x \in [-10, 10]$ 皆单调递减, 且一致趋向零. 又 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \right| \leq 2$, 故由狄里克雷判别法知原级数在 $[-10, 10]$ 上一致收敛.

$$\text{【2780】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}; -\infty < x < +\infty.$$

解 由 $x \in (-\infty, +\infty)$ 知, $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leq \frac{1}{n}$, 于是 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \right\}$ 对每一个 $x \in (-\infty, +\infty)$ 皆单调递减, 且一致地趋于零. 又

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{3} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\pi}{3} \right|} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

故由狄里克雷判别法知, 原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$\text{【2781】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}; 0 \leq x < +\infty.$$

解 由 $x \in [0, +\infty)$ 知, $\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, 从而 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n+x}} \right\}$ 对每一个 $x \in [0, +\infty)$ 皆单调递减且一致地趋于零, 又当 $x = 2l\pi (l = 0, 1, 2, \dots)$ 时,

$$\sum_{k=1}^n \sin x \sin kx = 0.$$

当 $x \neq 2l\pi (l = 0, 1, 2, \dots)$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx \right| &= |\sin x| \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \\ &\leq |\sin x| \cdot \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} = 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \leq 2. \end{aligned}$$

于是, 对任 $x \in [0, +\infty)$, 皆有 $\left| \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx \right| \leq 2$, 故由狄里克雷判别法知, 原级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

$$\text{【2782】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}; 0 \leq x < +\infty.$$

解 由于

$$\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}} = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}},$$

且由 2672 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 关于 x 一致收敛.

又 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}} \right\}$ 对每一个 $x \in [0, +\infty)$ 皆是单调增加的, 且

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}} \right| \leq 1. \text{ 因此, 由阿贝尔判别法知, 原级数在 } [0, +\infty] \text{ 上}$$

一致收敛.

【2783】 不连续函数的序列能一致收敛成连续函数吗?

研究例题:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \psi(x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

其中 $\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数.} \end{cases}$

解 可能, 如函数序列

$$f_n(x) = \frac{\varphi(x)}{n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

其中 $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数,} \\ 1, & x \text{ 为有理数.} \end{cases}$

显然, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上每一点皆不连续, 但由 $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ 知, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致趋于零而 $f(x) \equiv 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 显然是连续函数.

【2784】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 在区间 $[a, b]$ 一致收敛,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 也能一致收敛.

证 由题意知,任给 $\xi > 0$, 存在 $N = N(\xi)$, 当 $n > N$ 时, 对任 $x \in [a, b]$, 任 $p \in N$ 皆有

$$|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \xi,$$

$$\begin{aligned} \text{由 } & |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \\ & \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \xi, \end{aligned}$$

知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

【2785】 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 绝对并一致收敛, 则

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 在区间 $[a, b]$ 一定能一致收敛吗?

研究例题 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$, 其中 $0 \leq x \leq 1$.

解 不一定, 如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上绝对并且一致收敛, 但其绝对值级数不一致收敛. 事实上 $x \in [0, 1]$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n (1-x)x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n,$$

又由 2769 题知 $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上收敛, 但不一致收敛. 下面

证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛. 当 $x = 0, x = 1$ 时, 级数显然收敛. 当 $x \in (0, 1)$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

是交错级数且满足莱布尼兹条件, 收敛. 为证 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上的一致收敛性, 我们只要证明其余项

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k (1-x)x^k,$$

一致趋于零即可. 又

$$|R_n(x)| \leq (1-x)x^{n+1}, x \in [0,1] \quad ①$$

令 $g(x) = (1-x)x^{n+1}, x \in [0,1]$,

易知 $g(x)$ 在 $x = \frac{n+1}{n+2}$ 处达到最大值. 于是, 当 $x \in [0,1]$ 时,

$$0 \leq g(x) \leq g\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} < \frac{1}{n+2},$$

从而, 由 ① 知

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+2} \quad (x \in [0,1], n = 1, 2, \dots),$$

故我们有 $R_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上是一致收敛趋于零.

【2786】 证明绝对收敛且一致收敛的级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$\text{其中 } f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}; \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1} \pi x), & \text{若 } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{若 } 2^{-n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

不能用收敛的正项数项级数作为其强级数.

证 首先证明 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上是一致收敛的, 令

$$R_{n,p}(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x),$$

$$x \in [0,1],$$

$$\text{有 } R_{n,p}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \sin^2(2^{n+2} \pi x), & x \in (2^{-(n+2)}, 2^{-(n+1)}), \\ \frac{1}{n+2} \sin^2(2^{n+3} \pi x), & x \in (2^{-(n+3)}, 2^{-(n+2)}) \dots, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \frac{1}{n+p} \sin^2(2^{n+p+1} \pi x), & x \in (2^{-(n+p+1)}, 2^{-(n+p)}), \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

于是 $|R_{n,p}(x)| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$,

从而任意 $\xi > 0$, 取 $N = [\frac{1}{\xi}]$, 则当 $n > N$ 时, 对任 $x \in [0, 1]$,

任 $p \in N$, 皆有 $|R_{n,p}(x)| < \xi$, 故由柯西准则, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对收敛且一致收敛, 下面证明不能用某正项收敛数项级数

作为其强级数, 用反证法, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$ 是收敛的强级数, 即

$$|f_n(x)| \leq a_n, (n = 1, 2, \dots, \forall x \in [0, 1]). \quad ①$$

现取 $x_n = \frac{3}{2}2^{-(n+1)}$,

有 $2^{-(n+1)} < x_n < 2^{-n}$,

于是 $a_n \geq |f_n(x_n)| = \frac{1}{n^2} \sin^2(2^{n+1} \pi x_n) = \frac{1}{n} > 0$,

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 也收敛, 矛盾.

【2787】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 的各项在区间 $[a, b]$ 是单调函数. 该级数在这个区间的端点绝对收敛, 则该级数在区间 $[a, b]$ 是绝对收敛并一致收敛的.

证 由题意, $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(a)|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(b)|$ 皆收敛, 令

$$U_n = \max(|\varphi_n(a)|, |\varphi_n(b)|),$$

由 $0 \leq U_n \leq |\varphi_n(b)| + |\varphi_n(a)|$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛, 又 $\varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, 于是

$$|\varphi_n(x)| \leq u_n \quad (a \leq x \leq b, n = 1, 2, \dots),$$

据维尔斯特拉斯判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对且一

致收敛.

【2788】 证明:幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上都是绝对收敛且一致收敛的.

证 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-R, R)$ ($R > 0$), 任取 $[a, b] \subset (-R, R)$, 令 $l = \max(|a|, |b|)$, 故任意 $x \in [a, b]$ 有

$$|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot |l|^n = |a_n l^n|,$$

由题意知 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n l^n|$ 收敛, 因此, 幂级数在 $[a, b]$ 上绝对且一致收敛.

【2789】 设 $a_n \rightarrow \infty$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ 收敛. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

在任何不含有 a_n ($n = 1, 2, \dots$) 点的有界闭集中都是绝对收敛并一致收敛的.

证 设 S 是任一不包含 a_n ($n = 1, 2, \dots$) 点的有界闭集. 于是存在 $C > 0$, 当 $x \in S$ 时有 $|x| \leq C$, 且

$$\left| \frac{x}{a_n} \right| \neq 1 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

又由题设 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ 收敛, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|} = 0,$$

于是存在 N , 当 $n > N$, 对任 $x \in S$, 有 $\left| \frac{x}{a_n} \right| < \frac{1}{3}$, 从而, 当 $n > N$

时, 有 $\left| \frac{1}{x - a_n} \right| = \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{\left| 1 - \frac{x}{a_n} \right|}$

$$\leq \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{x}{a_n} \right|}$$

$$\leq \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2|a_n|},$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2|a_n|}$ 收敛, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{x-a_n} \right|$ 在 S 上绝对且一致收敛.

【2790】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x \geq 0$ 时也一致收敛.

证 因为 $0 < \frac{1}{n^x} \leq 1$, $\left\{ \frac{1}{n^x} \right\}$ 对每一个 $x \geq 0$ 皆是单调的. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛, 因此, 由阿贝尔判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛.

【2791】 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 在 $x \geq 0$ 域内一致收敛.

解 因为 $0 < e^{-nx} \leq 1 (x \geq 0)$, 且 $\{e^{-nx}\}$ 对每一个 $x \geq 0$ 是单调的, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 $x \geq 0$ 上一致收敛, 因此, 由阿贝尔判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 在 $x \geq 0$ 上一致收敛.

【2792】 证明: 函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在域 $-\infty < x < +\infty$ 内连续并具有连续导数.

证 由 $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 又由 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 因此 $f(x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 又 $\left(\frac{\sin nx}{n^3} \right)' = \frac{\cos nx}{n^2}$, 且级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 故 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

【2793】 证明函数:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2},$$

(1) 在一切点上有定义且是连续的, 但整数点 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 除外;

(2) 是周期等于 1 的周期函数.

证 把级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 分为两块:

$$(A) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2} \text{ 和 } (B) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}.$$

易知, 当 $x \neq k (k \in \mathbb{N})$ 时级数(A)收敛, 当 $x \neq -k (k \in \mathbb{N})$ 时, 级数(B)收敛, 因此, 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 收敛.

(1) 于是 $f(x)$ 在除去 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 外的一切点上有定义, 设 x_0 是定义域中的任一点, 则令 $x_0 \in ([x_0], [x_0] + 1)$, 令

$$[x_0] < a < x_0 < b < [x_0] + 1,$$

则 $[a, b]$ 是 $([x_0], [x_0] + 1)$ 上包含 x_0 的一个闭区间. 记 $q = \max(|a|, |b|)$, 在 $[a, b]$ 上考察级数(A)和(B), $x \in [a, b]$ 知, 存在 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时有

$$\left| \frac{1}{(n-x)^2} \right| \leq \frac{1}{(n-|x|)^2} \leq \frac{1}{(n-q)^2},$$

$$\left| \frac{1}{(-n-x)^2} \right| \leq \frac{1}{(n-|x|)^2} \leq \frac{1}{(n-q)^2}.$$

又 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-q)^2}$ 收敛, 因此, 级数 $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 和 $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$ 在

$[a, b]$ 上一致收敛, 于是级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a,$

$b]$ 上一致收敛, 即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 又由 $\frac{1}{(n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上连续知, 该级数的和函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续从而 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$ 时

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[n-(x+1)]^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(n-1)-x]^2} \\ &\stackrel{\text{令 } m=n-1}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m-x)^2} = f(x), \end{aligned}$$

所以, 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$ 时, $f(x)$ 是以 1 为周期的函数.

【2794】 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}],$$

在区间 $0 \leq x \leq 1$ 非一致收敛, 但是它的和在这个区间是连续函数.

证 由

$$S_n = \sum_{k=1}^n [kxe^{-kx} - (k-1)xe^{-(k-1)x}] = nxe^{-nx},$$

知 $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nxe^{-nx} = 0 \quad (x \in [0, 1])$,

显然在 $[0, 1]$ 上连续, 但该级数在 $[0, 1]$ 上不一致收敛, 用反证法, 设该级数在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 于是任 $\epsilon > 0$, 存在 $N = N(\epsilon)$, 当 $n \geq N$, 对任意 $x \in [0, 1]$, 皆有

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon,$$

现取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}e^{-1}$, 则存在 N_0 , 当 $n \geq N_0$ 时, 任 $x \in [0, 1]$, 皆有

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon_0 = \frac{1}{2}e^{-1}.$$

今取 $x = \frac{1}{n}$, 从而

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{1}{n}\right) \right| < \frac{1}{2}e^{-1},$$

但
$$\left| S_n\left(\frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{1}{n}\right) \right| = S_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot \frac{1}{n} e^{-n \cdot \frac{1}{n}} \\ = e^{-1} > \frac{1}{2}e^{-1},$$

矛盾. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nx e^{-nx} - (n-1)x e^{-(n-1)x}],$$

在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

【2795】 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它的连续性, 设

$$(1) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(2) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2};$$

$$(3) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

证 (1) 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|x + \frac{1}{n}\right|^n} = |x|,$$

知, 当 $|x| < 1$ 时, 级数绝对收敛. 当 $|x| > 1$ 时, 级数发散. 当 $|x| = 1$ 时, 通项不趋于零, 级数发散, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 下证 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续. 令 $0 < \delta < 1$, 当 $|x| \leq 1 - \delta$ 时,

$$\left|x + \frac{1}{n}\right| \leq \left(1 - \delta + \frac{1}{n}\right)^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \delta + \frac{1}{n}\right)^n$ 收敛, 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$ 在 $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ 上一致收敛, 从而 $f(x)$ 在 $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ 上连续, 由 δ 可以任

意小, 知 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续.

(2) 因为

$$\frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2} = \frac{x}{x^2 + n^2} + (-1)^n \frac{n}{x^2 + n^2},$$

由阿贝尔判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{x^2 + n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因此, 其和函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 又 $\forall C > 0$, 当 $x \in [-C, C]$ 时, 由 $\left| \frac{x}{x^2 + n^2} \right| \leq \frac{C}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$ 收敛, 有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$ 在 $[-C, C]$ 上一致收敛, 从而其和函数在 $[-C, C]$ 上连续, 由 C 的任意性知上述和函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 于是 $f(x)$ 是这两个级数的和, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义且连续.

(3) 当 $x \neq 0$ 时, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|}{(1+x^2)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|x|}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

知级数绝对收敛, 当 $x = 0$ 时, 级数收敛到零. 于是 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 设任取一点 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_0 \neq 0$, 不妨设 $x_0 > 0$, 我们取 a, b 满足 $0 < a < x_0 < b$, 显然当 $x \in [a, b]$ 时有

$$\left| \frac{x}{(1+x^2)^n} \right| \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{(1+a^2)^n}$ 收敛, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 又 $\frac{x}{(1+x^2)^n} (n = 1, 2, \dots)$ 连续, 从而和函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 因此, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 且

$$\begin{aligned} f(x) &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \\ &= x \cdot \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{x}, (x \neq 0), \end{aligned}$$

于是
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

由此, 我们有 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续, 在 $x \neq 0$ 处连续.

【2796】 设 $r_k (k = 1, 2, \dots)$ 是 $[0, 1]$ 区间的有理数. 证明函数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

具有以下性质: (1) 连续性; (2) 在无理点可微分和在有理点不可微分.

证 (1) 由 $x \in [0, 1]$ 知 $\left| \frac{x - r_k}{3^k} \right| \leq \frac{1}{3^k}$, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x - r_n|}{3^n}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛. 而 $\frac{|x - r_n|}{3^n} (n = 1, 2, \dots)$ 连续, 因此, 和函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续.

(2) 设 $x_0 \in [0, 1]$, 且 x_0 为无理点, 当 $x \neq x_0$ 时

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x), \quad \textcircled{1}$$

其中
$$v_n(x) = \frac{|x - r_n| - |x_0 - r_n|}{3^n(x - x_0)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

又
$$\begin{aligned} |x - r_n| - |x_0 - r_n| &\leq |(x - r_n) - (x_0 - r_n)| \\ &= |x - x_0|, \end{aligned}$$

于是
$$|v_n(x)| \leq \frac{1}{3^n}, \quad (x \neq x_0),$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 $(0, 1), x \neq x_0$ 上一致收敛. 此外, 对每个固定的 n , 由于 $x_0 \neq r_n$, 故当 x 与 x_0 充分接近时, $(x - r_n)$ 与 $(x_0 - r_n)$ 同号, 于是

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v_n(x) = \frac{1}{3^n} \operatorname{sgn}(x_0 - r_n) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

从而当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 可逐项求极限, 由 ① 式有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} v_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \operatorname{sgn}(x_0 - r_n).\end{aligned}$$

因此, $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 且

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \operatorname{sgn}(x_0 - r_n).$$

设 $x_0 \in [0, 1]$ 为一个有理点, 则 $x_0 = r_m$, m 为某正数, 这时 ① 式为当 $x \neq x_0$ 时

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = v_m(x) + \sum_{k \neq m}^{\infty} v_k(x), \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\text{其中 } v_m(x) &= \frac{|x - r_m| - |x_0 - r_m|}{3^m(x - x_0)} \\ &= \frac{|x - x_0|}{3^m(x - x_0)} = \frac{1}{3^m} \operatorname{sgn}(x - x_0).\end{aligned}$$

类似于 ① 知: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\sum_{k \neq m}^{\infty} v_k(x)$ 可逐项取极限, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k \neq m}^{\infty} v_k(x) &= \sum_{k \neq m}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} v_k(x) \\ &= \sum_{k \neq m}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - x_k),\end{aligned}$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} v_m(x) = \frac{1}{3^m}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} v_m(x) = -\frac{1}{3^m},$$

于是 $\lim_{x \rightarrow x_0} v_m(x)$ 不存在, 由 ② 式即知 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 不存在, 故 $f(x)$ 在点 x_0 不可微.

【2797】 证明黎曼 ζ 函数

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

在 $x > 1$ 时连续且在这个域内具有各阶的连续导数.

证 由 $x > 1$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 收敛, 各项求导后所得级数为

$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$. 设 $1 < a \leq x < +\infty$. 则有 $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 在 $[a, \infty]$ 上一致收敛, 事实上, 当 $x \in [a, \infty)$ 时, 有

$$0 < \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a},$$

又由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\ln n}{n^a}}{\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{a+1}{2}}} = 0,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}} \left(\frac{a+1}{2} > 1 \right)$ 收敛, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$

在 $[a, \infty)$ 上一致收敛, 又 $\frac{\ln n}{n^x} (n = 1, 2, \dots)$ 是 x 的连续函数, 故有

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, \quad (1)$$

且 $\zeta'(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上连续, 由 $a > 1$ 的任意性知 (1) 式对任意 $x \in (1, \infty)$ 皆成立, 且 $\zeta'(x)$ 在 $(1, \infty)$ 上连续, 于是 $\zeta(x)$ 也在 $(1, \infty)$ 上连续.

由数学归纳法, 且对任 $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^a} (a > 1)$ 皆收敛, 同理可证: 任 $k \in \mathbb{N}$, $\zeta^{(k)}(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上皆存在且连续, 且

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x}, \quad x \in (1, +\infty).$$

【2798】 证明 θ 函数

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 n^2 x}$$

当 $x > 0$ 时有定义且可无穷次微分.

证 令 $u_n(x) = e^{-\pi^2 n^2 x}$, 有 $u_{-n}(x) = u_n(x)$, 于是对 $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x)$ 收敛可微性只要考虑级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x} \quad (x > 0),$$

即可.

任意 $x \in (0, +\infty)$, 存在 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$0 < e^{-n^2 x} < \frac{1}{n^2 x},$$

而级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2 x} (x > 0)$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x}$ 收敛, 对级数各项

求导后有 $-\sum_{n=1}^{\infty} \pi n^2 e^{-n^2 x}$, 下证该级数在 $[\epsilon, +\infty)$ 内是一致收敛的 ($\epsilon > 0$). 事实上, 存在 $n_1 > 0$, 当 $n \geq n_1$ 时, 对任 $x \in [\epsilon, +\infty)$ 皆有

$$0 < \pi n^2 e^{-n^2 x} \leq \pi n^2 e^{-n^2 \epsilon} < \frac{1}{n^2 \epsilon},$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \epsilon}$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \pi n^2 e^{-n^2 x}$ 在 $[\epsilon, +\infty)$ 上一致收敛, 又级数的各项都是连续函数, 故有

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 x}$$

在 $[\epsilon, +\infty)$ 内连续可微, 由 $\epsilon > 0$ 的任意性知 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可微, 且

$$\theta'(x) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi n^2 e^{-n^2 x}, x \in (0, +\infty),$$

同理可证 $\theta'(x)$ 的可微性. 由数学归纳法, 且存在 $n_k > 0$, 当 $n \geq n_k$ 时, 对任 $x \in [\epsilon, +\infty)$, 皆有

$$0 < (\pi n^2)^k e^{-n^2 x} < \frac{1}{n^2 \epsilon},$$

从而 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内 k 次可微, 这里 $k \in N$. 因此, $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无穷可微.

【2799】 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它的可微性, 设

$$(1) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x};$$

$$(2) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2},$$

解 (1) 当 $x \neq -k (k=1, 2, \dots)$ 时, 级数是交错级数, 由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$ 收敛.

任取 $x_0, x_0 \neq -k (k \in \mathbb{N})$,

1° 当 $x_0 \geq 0$ 时, 取 $\beta > x_0$, 于是 $x_0 \in [-\frac{1}{2}, \beta]$, 令

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n+x},$$

则 $u'_n(x) = \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2} \quad n=1, 2, \dots, x \in [-\frac{1}{2}, \beta],$

且在 $[-\frac{1}{2}, \beta]$ 上连续, 又 $\left\{ \frac{n}{(n+x)^2} \right\}$ 单调下降且一致趋于零, 这是由于 $x \in [-\frac{1}{2}, \beta], n > 1$ 时, 有

$$\left| \frac{n}{(n+x)^2} \right| \leq \frac{n}{(n-1)^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

又 $\sum_{k=1}^n (-1)^k$ 有界, 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[-\frac{1}{2}, \beta]$ 上一致收敛.

从而 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$ 在 $(-\frac{1}{2}, \beta)$ 上可微, 于是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微.

2° 当 $x_0 < 0$ 时, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 满足

$$-(k_0 + 1) < x_0 < -k_0,$$

现取 α, β 满足

$$-(k_0 + 1) < \alpha < x_0 < \beta < -k_0,$$

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上

$$u'_n(x) = \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2},$$

连续, 又

$$\begin{aligned} \left| \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2} \right| &= \frac{n}{n^2 + 2nx + x^2} \leq \frac{n}{n^2 - 2n|x|} \\ &\leq \frac{n}{n^2 - 2n|\alpha|} = \frac{1}{n - 2|\alpha|}, \end{aligned}$$

于是 $\left\{ \frac{n}{(n+x)^2} \right\}$ 单调下降, 且一致趋于零, 又 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$. 因

此 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛, 从而

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x},$$

在 (α, β) 上可微, 显然在 $x = x_0$ 处可微, 综上所述, 函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $x \neq -k (k = 1, 2, \dots)$ 上有定义且可微.

(2) $x = 0$ 时, 级数显然收敛

当 $x \neq 0$ 时, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|}{n^2 + x^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + x^2} |x| = |x|,$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2} (x \neq 0)$ 收敛, 进一步有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2},$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛.

设 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$, 显然 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,

于是 $f(x) = |x| \cdot g(x)$, 任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 则有 $m > 0$. 满

足 $-m < x_0 < m$, 当 $x \in [-m, m]$ 时, 有

$$\left| \left(\frac{1}{n^2 + x^2} \right)' \right| = \left| \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2} \right| \leq \frac{2m}{n^4} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m}{n^4}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + x^2} \right)'$ 在 $[-m, m]$ 上一致收敛. 进而 $g(x)$ 在 $[-m, m]$ 上可微, 于是 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 点可微, 又 $|x|$ 在 $x \neq 0$ 处可微, 在 $x = 0$ 处不可微, 且 $g(x) > 0$, 因而 $f(x) = |x|g(x)$ 在 $x \neq 0$ 处可微, 在 $x = 0$ 处不可微.

【2800】 证明序列:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan x^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 区间一致收敛, 但是

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]'_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1)$$

证 由

$$|\arctan x^n| \leq \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

知 $|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n} \quad (n = 1, 2, \dots, x \in (-\infty, +\infty))$,

于是 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$,

现任给 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{\pi}{2\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (-\infty,$

$+\infty)$, 皆有 $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2(N+1)} \leq \frac{\pi}{2 \cdot \frac{\pi}{2\varepsilon}} = \varepsilon$.

从而, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛于零. 又

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}},$$

有 $f'_n(1) = \frac{1}{2}$,

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = \frac{1}{2}$.

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, 所以 $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' = 0$,

于是 $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' |_{x=1} = 0 \neq \frac{1}{2}$.

【2801】 证明序列:

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 区间一致收敛,但是

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

证 因为

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x^2 + \frac{1}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right) = x^2, \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{n},$$

于是任意的 $\epsilon > 0$, 令 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 对任意 $x \in (-\infty,$

$+\infty)$, 有 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$,

故 $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$\text{又} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' = f'(x) = 2x,$$

$$\text{而} \quad f'_n(x) = 2x + \cos n\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ 不存在. 因此

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

【2802】 当参数 α 为何值时: (1) 序列

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

①

① 在 $[0, 1]$ 区间收敛;

(2) 序列 ① 在 $[0, 1]$ 区间一致收敛;

(3) 能够在积分号下取极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx?$$

解 (1) 当 $x = 0$ 时, $f_n(x) = 0$,

当 $x \neq 0$ 时, $x \in [0, 1]$, 对任意 $\alpha \in R$, 皆有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x e^{-nx} = 0,$$

故任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于函数 $f(x) = 0$

(2) 由

$$f'_n(x) = n^\alpha e^{-nx} (1 - nx),$$

$$\text{令 } f'_n(x) = 0,$$

$$\text{有 } x = \frac{1}{n},$$

而当 $x < \frac{1}{n}$ 时 $f'_n(x) > 0$, 当 $x > \frac{1}{n}$ 时, $f'_n(x) < 0$, 故 $x = \frac{1}{n}$ 为 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值点, 于是

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha-1} e^{-1} \quad (x \in [0, 1]),$$

当 $\alpha < 1$ 时,

$$n^{\alpha-1} e^{-1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

进而, 任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [0, 1]$, 皆有 $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$, 也就是当 $\alpha < 1$ 时, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于零. 当 $\alpha \geq 1$ 时, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) \nrightarrow 0$, 因而 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致趋于零.

(3) 由题设, 问 α 为何值时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx, \quad (*)$$

$$\text{由 } \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx = \int_0^1 0 dx = 0,$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \int_0^1 x e^{-nx} dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left(-\frac{1}{n} e^{-n} - \frac{1}{n^2} e^{-n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-2} (1 - e^{-n} - ne^{-n}),$$

于是要使 $(*)$ 式成立, 我们可问 α 为何值时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-2} (1 - e^{-n} - ne^{-n}) = 0.$$

显然, $\alpha < 2$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0,$$

也就是当 $\alpha < 2$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

【2803】 证明序列:

$$f_n(x) = nx e^{-nx^2}, (n = 1, 2, \dots).$$

在 $[0, 1]$ 区间收敛, 但是

$$\int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

证 当 $x = 0$ 时

$$f_n(x) = 0, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, 故 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于零. 又

$$\int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx = \int_0^1 0 dx = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx e^{-nx^2} dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-nx^2} \right) \Big|_0^1$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n} \right) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

于是有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx.$

【2804】 证明序列:

$$f_n(x) = nx(1-x)^n, (n = 1, 2, \dots),$$

在区间 $[0, 1]$ 收敛而非一致收敛, 但是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

证 当 $x = 0, x = 1$ 时,

$$f_n(x) = 0, (n = 1, 2, \dots).$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, 由洛必达法则知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x)^n = 0 = f(x).$$

于是 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于零, 下面说明 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不—

致收敛. 现取 ε_0 , 使

$$0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2e}, \text{ 任 } n \in \mathbb{N}.$$

令 $x_n = \frac{1}{n+1}$,

有
$$\begin{aligned} \left| f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) - f(x) \right| &= \left| f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) - 0 \right| \\ &= n \cdot \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

于是
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) - f(x) \right| = e^{-1}.$$

故存在 $n_0 > 0$, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| > \frac{1}{2e} > \varepsilon_0,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

又
$$\begin{aligned} \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx &= \int_0^1 0 dx = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx(1-x)^n dx \\ &\stackrel{\text{令 } y=1-x}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n(1-y)y^n dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} y^{n+1} - \frac{n}{n+2} y^{n+2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0, \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx.$$

【2805】 在下式中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx$ 在积分号下取极限是否合理?

解 因为

$$\int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^4} \right] dx = \int_0^1 0 dx = 0,$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \arctan nx^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

于是在积分号下取极限不合理.

注:一般地,若 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛,则它是保证在积分号下取极限的一个充分条件,但若 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上不一致收敛时,则不一定能保证可以在积分号下取极限.

求解(2806 ~ 2808).

【2806】 $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}.$

解 由题意可设 $x \in [0, 1]$, 因为 $\frac{x^n}{x^n+1} \leq 1$, 且 $\left\{ \frac{x^n}{x^n+1} \right\}$ 关于 n 单调下降, 又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 于是由阿贝尔判别法知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}, \quad (1)$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 又 $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$ 在 $[0, 1]$ 上连续,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \end{aligned}$$

由 2661 题知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

【2807】 $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}).$

解 由题意,不妨设 $x \in [0, 1)$, 而

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x) = \frac{x(1-x)}{1-x} = x,$$

于是 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1.$

【2808】 $\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$

解 由题意,不妨设 $x \in [0, 1]$, 由于 $\frac{1}{n^x}$ 在 $[0, 1]$ 上单调下降, 且小于或等于 1, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 又因为 $\frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^n n^x} = \frac{1}{2^n},$$

$$\text{因而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

【2808. 1】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2}.$

解 由题意,可设 $x \in [M, +\infty)$, $M > 0$,

$$\text{由 } 0 < \frac{x^2}{1+2^n n^x} \leq \frac{x^2}{2^n n^x}, x \in [M, +\infty).$$

考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{2^n n^x}$ 在 $[M, +\infty)$ 上的一致收敛性.

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{n^x} = 0,$$

于是 任 $\epsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $x > N$ 时, 有

$$0 < \frac{x^2}{n^x} < \epsilon,$$

从而 $\frac{x^2}{n^x}$ 在 $[M, +\infty)$ 上有界, 又 $\left\{ \frac{x^2}{n^x} \right\}$ 对每一 $x \in [M, +\infty)$ 关于

n 单调递减. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 在 $[M, +\infty)$ 上一致收敛, 于是由阿贝尔判

别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{2^n n^x}$ 在 $[M, +\infty)$ 上一致收敛, 因此, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+2^n n^x}$ 在 $[M, +\infty)$ 上一致收敛. 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+2^n n^x} = 0,$$

知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+2^n n^x} = 0.$

【2809】 逐项微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$ 是否合理?

解 由

$$\left(\arctan \frac{x}{n^2} \right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n^2} \right)^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n^4 + x^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{x}{n^2} \right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛. 又

$$\left| \arctan \frac{x}{n^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2},$$

我们有 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$ 收敛. 因此, 原级数和的导数可以用逐项微分来计算.

【2810】 在 $[0, 1]$ 区间逐项积分级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}})$ 是否合理?

解 设

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (x^{\frac{1}{2k+1}} - x^{\frac{1}{2k-1}}),$$

于是当 $x = 0, 1$ 时,

$$S_n(x) = 0.$$

当 $x \in (0, 1)$ 时,

$$S_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x.$$

从而 $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, 1, \\ 1-x, & 0 < x < 1. \end{cases}$

令 $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{2})$, 对任 $n \in \mathbb{N}$,

取 $x_n = \frac{1}{x^{2n+1}}$,

有 $|S_n(x_n) - S(x_n)| = \frac{1}{2} > \epsilon_0$,

因此, $S_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

又 $\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) \right] dx = \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \frac{2n-1}{2n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2n+2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

于是本题的级数在 $[0, 1]$ 上作逐项积分计算是合理的.

注: 此题说明, 级数在 $[a, b]$ 上一致收敛仅是可以逐项积分的一个充分条件.

【2811】 设 $f(x) (-\infty < x < +\infty)$ 为无穷次可微分函数且它的导数 $f^{(n)}(x) (n=1, 2, \dots)$ 的序列在每一个有穷区间 (a, b) 可一致收敛至函数 $\varphi(x)$. 证明 $\varphi(x) = Ce^x$, 其中 C 为常数.

证 因为 $f(x)$ 任意可微, 于是 $f^{(n)}(x)$ 在 (a, b) 内连续且可微, 又

$$f^{(n)}(x) \rightrightarrows \varphi(x), x \in (a, b),$$

且 $f^{(n+1)}(x) \rightrightarrows \varphi(x), x \in (a, b),$

从而 $\varphi(x)$ 在 (a, b) 内可微, 且

$$\varphi'(x) = [\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x)]' = \lim_{n \rightarrow \infty} [f^{(n)}(x)]'$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n+1)}(x) = \varphi(x).$$

于是我们有

$$\ln \varphi(x) = x + C,$$

即 $\varphi(x) = Ce^x, C$ 为常数.

【2811. 1】 设函数 $f_n(x), n=1, 2, \dots$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义且有界, 而且在每一个 $[a, b]$ 区间 $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$. 由此能够得出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x f_n(x) = \sup_x \varphi(x)$ 吗? 研究例题 $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, n=1, 2, \dots$.

解 不一定, 如

$$f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, n=1, 2, \dots,$$

显然 任意 $x \in (-\infty, +\infty)$

有 $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(x-n)^2} = 0,$

且 $|f_n(x)| = \frac{1}{e^{(x-n)^2}} < 1, (n=1, 2, \dots).$

又 $-\infty < a < b < +\infty$, 在 $[a, b]$ 上, 令

$$M = \max\{|a|, |b|\},$$

有 $|f_n(x)| = \frac{1}{e^{(x-n)^2}} < \frac{1}{e^{(n-M)^2}},$

于是 $f_n(x) \rightrightarrows 0, x \in [a, b].$

而 $\sup_x \varphi(x) = 0, \sup_x f_n(x) = \sup_x e^{-(x-n)^2} = 1,$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x f_n(x) = 1 \neq 0 = \sup_x \varphi(x).$

§ 5. 幂级数

1. 收敛区间 对于每一个幂级数

$$a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

都存在收敛闭区间: $|x-a| \leq R$. 该级数在其内收敛, 而在其外部发散. 收敛半径 R 可根据柯西—阿达玛公式确定:

$$\rho = \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

如果极限存在, 则收敛半径 R 也可以按照下式计算:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

2. 阿贝尔定理 若幂级数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n (|x| < R),$$

在收敛区间的端点 $x = R$ 上收敛, 则

$$S(R) = \lim_{x \rightarrow R-0} S(x),$$

3. 泰勒级数 在 a 点的解析函数 $f(x)$ 可在这个点的某个邻域展开为幂级数:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

这个级数的余项:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

可以写成:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1),$$

(拉格朗日型) 或写成

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x-a))}{n!} (1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1},$$

$$(0 < \theta_1 < 1),$$

(柯西型).

必须记住以下五个基本的展开式:

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,$$

$$(-\infty < x < +\infty);$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$(-\infty < x < +\infty);$$

$$(4) (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \\ (-1 < x < 1);$$

$$(5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \\ (-1 < x < 1).$$

4. 幂级数的运算 在公共的收敛区间 $|x-a| < R$ 内有:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-a)^n;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n;$$

其中,

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0;$$

$$(3) \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-a)^n;$$

$$(4) \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right] dx = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

5. 复数域的幂级数 研究级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

其中,

$$c_n = a_n + ib_n, a = \alpha + i\beta,$$

$$z = x + iy, i^2 = -1$$

对于每一个这样的级数都有一个闭收敛圆 $|z-a| \leq R$, 在其内部该级数收敛(而且绝对收敛), 而在其外发散. 收敛半径 R 等于幂

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ 在实数域的收敛半径.

确定下列幂级数的收敛半径和收敛区间, 并研究其在收敛区间端点的性质(2812 ~ 2832).

【2812】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$

解 令 $a_n = \frac{1}{n^p}$,

$$\begin{aligned} \text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p = 1. \end{aligned}$$

于是收敛半径 $R = 1$, 从而收敛区间的端点为 $x = -1, x = 1$.

1° $x = -1$ 情形, 若 $p > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 绝对收敛, 若 $0 < p \leq 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛, 若 $p \leq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 发散.

2° $x = 1$ 情形, 若 $p > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 绝对收敛, 若 $p \leq 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

【2813】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$.

解 令 $a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{n}$,

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{3}$,

知该幂级数的收敛半径为 $\frac{1}{3}$, 于是级数在 $|x+1| < \frac{1}{3}$ 上收敛, 从而收敛区间的端点为 $x = -\frac{2}{3}, x = -\frac{4}{3}$.

1° $x = -\frac{4}{3}$ 情形, 此时幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot (-1)^n \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n} \right],$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n+1}}{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}} = \frac{2}{3} < 1,$$

有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ 收敛, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛. 因而当 $x = -\frac{4}{3}$ 时, 幂级数收敛.

2° $x = -\frac{2}{3}$ 情形, 此时幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n} \right],$$

由 1° 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ 绝对收敛, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 于是我们有 $x = -\frac{2}{3}$ 时, 幂级数发散.

综上所述, 幂级数收敛域为 $\left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

【2814】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

解 令

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4,$$

知, 收敛半径 $R = 4$, 从而收敛区间的端点为 $x = -4, x = 4$.

1° $x = -4$ 情形. 由 Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} (1 + o(1))$$

$$\text{有 } \left| \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-4)^n \right| = \frac{(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n})^2 (1 + o(1))}{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n} (1 + o(1))} \cdot 4^n$$

$$= \sqrt{n\pi}(1+o(1)),$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n!)^2 (-4)^n}{(2n)!} \right| = +\infty$.

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-4)^n$ 发散.

2° $x = 4$ 情形, 此时幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n))}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)},$$

$$\text{令 } u_n = \frac{2 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!},$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{2n+2} \right) = -\frac{1}{2} < 1$,

故当 $x = 4$ 时, 幂级数收敛. 综上所述该幂级数的收敛区间为 $(-4, 4]$.

$$\text{【2815】 } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n \quad (0 < \alpha < 1).$$

解 令 $a_n = \alpha^{n^2}$, $\alpha \in (0, 1)$,

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha^{2n+1}} = +\infty,$$

于是收敛半径 $R = +\infty$, 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

$$\text{【2816】 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

解 令 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$,

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \right]^n \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

有收敛半径 $R = \frac{1}{e}$, 从而收敛区间的端点 $x = \pm \frac{1}{e}$,

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \left(\pm \frac{1}{e}\right)^n \right| &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n \\ &= \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n, \end{aligned}$$

$$\text{有} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\pm \frac{1}{e}\right)^n \right| = 1 \neq 0,$$

所以幂级数在收敛区间的端点处发散, 即收敛区间为 $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

$$\text{【2817】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1).$$

$$\text{解} \quad \text{记 } a_n = \frac{n!}{a^{n^2}},$$

$$\text{由} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty, (a > 1),$$

知收敛半径为 $R = +\infty$, 于是收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

$$\text{【2818】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \left(\frac{x-1}{2} \right)^n.$$

$$\text{解} \quad \text{令 } a_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p \cdot \frac{1}{2^n},$$

$$\text{由} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^p \right] = 2,$$

知收敛半径为 $R = 2$, 于是收敛区间端点为 $x = -1, x = 3$.

(1) $x = -1$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p,$$

由 2689 题知: 若 $p > 2$, 该级数绝对收敛; 若 $0 < p \leq 2$, 该级数条件收敛; 若 $p \leq 0$, 该级数发散.

(2) $x = 3$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p,$$

当 $p > 2$ 时, 该级数收敛; 当 $p \leq 2$ 时, 该级数发散.

$$\text{【2819】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p x^n.$$

$$\text{解} \quad \text{令 } a_n = (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p,$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^p = 2^p,$$

知收敛半径 $R = 2^p$, 收敛区间的端点为 $x = \pm 2^p$.

(1) $x = -2^p$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p.$$

$$\text{令 } u_n = \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p,$$

由

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \left(\frac{2n+3}{2n+2} \right)^p = \left(1 + \frac{1}{2n+2} \right)^p \\ &= 1 + \frac{p}{2n+2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

知当 $\frac{p}{2} > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 当 $\frac{p}{2} \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(2) $x = 2^p$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^p, \quad \text{①}$$

由 2689 题知: $p > 2$ 时, 由级数 ① 绝对收敛; $0 < p \leq 2$ 时, 级数 ① 条件收敛; 当 $p \leq 0$ 时, 通项不趋于零, 级数 ① 发散.

$$\text{【2820】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n.$$

$$\text{解} \quad \text{令 } a_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!},$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1,$$

知收敛半径 $R = 1$, 于是收敛区间端点为 $x = \pm 1$.

(1) $x = 1$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}, \quad (1)$$

由 2700 题知:当 $m \geq 0$ 时,级数 ① 绝对收敛;当 $-1 < m < 0$ 时,级数 ① 条件收敛;当 $m \leq -1$ 时,级数 ① 发散.

(2) $x = -1$ 情形,此时级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n}, \end{aligned} \quad (2)$$

由(1)知,当 $m \geq 0$ 时,级数 ② 绝对收敛;当 $m < 0$ 时,若 m 是负整数,设 $m = -k (k \in \mathbb{N})$, 则通项为

$$\begin{aligned} & \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(k+n-1)}{(k-1)!}, \end{aligned}$$

于是当 $n \rightarrow +\infty$ 时,通项趋于无穷大,级数 ② 发散;若 $m \neq -k (k \in \mathbb{N})$, 当 $m < -l (l > 0)$ 有通项大于 $\frac{l(l+1)\cdots(l+n-1)}{n!}$, 级数 ② 发散;于是,当 $m < 0$ 时,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n} \text{ 发散.}$$

【2821】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n \quad (a > 0, b > 0).$

解 原级数是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} x^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^2} x^n$ 的和.

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} x^n$ 易知收敛半径为 $R_1 = \frac{1}{a}$, 对于级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 $R_2 = \frac{1}{b}$, 于是原级数的收敛半径为 $R = \min(R_1, R_2)$, 收敛区间的端点为 $x = \pm R$.

(1) $x = -R$ 情形,若 $a < b$, 此时原级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(-\frac{1}{b} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}} \right| = \frac{a}{b} < 1,$$

知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n$ 绝对收敛. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ 绝对收敛. 因此, $a < b$ 时, 级数 (1) 绝对收敛. 当 $a \geq b$ 时, 此时级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(-\frac{1}{a} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{b}{a} \right)^n, \end{aligned} \quad (2)$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{b}{a} \right)^n$ 当 $b < a$ 时, 绝对收敛; 当 $b = a$ 时, 条件收敛. 于是当 $a \geq b$ 时, 级数 (2) 条件收敛.

(2) $x = R$ 情形, 若 $a < b$, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(\frac{1}{b} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n + \frac{1}{n^2} \right],$$

由(1)知该级数绝对收敛, 若 $a \geq b$ 时, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(\frac{1}{a} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{b}{a} \right)^n,$$

易知发散.

【2822】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0).$

解 令 $c_n = \frac{1}{a^n + b^n},$

$$\begin{aligned}\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max(a, b) \cdot \frac{1 + \theta^{n+1}}{1 + \theta^n} \right] \\ &= \max(a, b),\end{aligned}$$

$$\text{其中 } \theta = \frac{\min(a, b)}{\max(a, b)}, 0 < \theta \leq 1,$$

知收敛半径 $R = \max(a, b)$, 收敛区间端点为 $x = \pm R$.

又 $|x| = R$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^n}{a^n + b^n} = 1 \neq 0,$$

故我们有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{a^n + b^n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n R^n}{a^n + b^n}$ 皆发散, 于是收敛区间为 $(-R, R)$.

$$\text{【2823】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a > 0).$$

$$\text{解 令 } c_n = \frac{1}{a^{\sqrt{n}}},$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} = 1,$$

知收敛半径 $R = 1$, 于是收敛区间端点为 $x = \pm 1$.

(1) $x = 1$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}, \quad \text{①}$$

$$\text{由 } n \left[\frac{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{a^{\sqrt{n+1}}}} - 1 \right] = \frac{a^{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

$$\text{知 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{a^{\sqrt{n+1}}}} - 1 \right] = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ -\infty, & a < 1. \end{cases}$$

于是由拉阿比判别法, 当 $a > 1$ 时, 级数 ① 收敛; 当 $a < 1$ 时, 级数 ① 发散; 又 $a = 1$ 时, 通项为 1, 级数 ① 发散.

(2) $x = -1$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}, \quad (2)$$

由(1), 当 $a > 1$ 时, 级数 ② 绝对收敛; 当 $a \leq 1$ 时, 通项不趋于零, 级数 ② 发散.

综上所述, $|x| = 1$ 时, 若 $a > 1$, 级数绝对收敛; 若 $a \leq 1$, 级数发散.

【2824】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

解 令 $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + 1}},$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{(n+1)^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 1}} \right] = 1,$

知收敛半径 $R = 1$, 收敛区间端点为 $x = \pm 1$.

(1) $x = 1$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad (1)$$

因为 $0 < \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + 1}} < \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛(2823 题的结论), 于是级数 ① 收敛.

(2) $x = -1$ 情形, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad (2)$$

由 ① 知级数 ② 绝对收敛.

【2825】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n.$$

解 令

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1,$

知收敛半径 $R = 1$, 收敛区间端点为 $x = \pm 1$.

(1) $x = 1$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

由拉阿比判别法知该级数发散.

(2) $x = -1$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

它是交错级数, 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+3}{2n+2} > 1,$$

知 $a_n > a_{n+1}$, 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 0,$$

于是据莱布尼兹判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 收敛.

【2826】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$$

解 令

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 1,$$

知收敛半径 $R = 1$, 收敛区间端点为 $x = \pm 1$.

(1) $x = -1$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

由 Stirling 公式有

①

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2n\pi} e^{-n} n^n} \left(\frac{n}{e} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ 发散, 故级数 ① 发散.

(2) $x = 1$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n, \quad (2)$$

由 (1), $\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n = 0,$$

又
$$\frac{\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n}{\frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1}} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} > 1,$$

于是级数 ② 满足莱布尼兹条件, 级数 ② 收敛.

【2827】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n.$

解 令

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$

知, 收敛半径 $R = 1$, 又 $|x| = 1$ 时, $a_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 我们有该幂级数的收敛区间为 $(-1, 1)$.

【2828】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n.$

解 令 $a_n = \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n},$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 4,$

知, 收敛半径为 $R = \frac{1}{4}$, 收敛区间的端点为 $x = \pm \frac{1}{4}$.

(1) $x = \frac{1}{4}$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n \cdot 4^n}, \quad (1)$$

该级数可分为两部分, 一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$, 一部分为

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$, 显然 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ 发散, 又由柯西判别法知

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$ 收敛, 于是级数 (1) 发散.

(2) $x = -\frac{1}{4}$ 情形, 同理, 原级数可拆成一个发散级数与一个

收敛级数的和, 因此, $x = -\frac{1}{4}$ 时, 级数发散.

【2829】
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos \frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n.$$

解 令

$$a_n = \frac{\left(1 + 2\cos \frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n},$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3,$

知收敛半径为 $R = \frac{1}{3}$, 收敛区间端点为 $x = \pm \frac{1}{3}$.

当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时, 设 $n = 8k$, 由

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + 2\cos 2k\pi)^{8k}}{\ln 8k} \cdot \frac{1}{3^{8k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8},$$

而 $\frac{1}{\ln k + \ln 8} > \frac{1}{k + \ln 8} > 0$ 知, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$ 发散.

对于

$$n = 8k + 1, 8k + 2, \dots, 8k + 7, (k = 1, 2, \dots).$$

情形, 此时级数为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos \frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n} \left(\pm \frac{1}{3}\right)^n. \quad ①$$

因为 $\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ 单调趋于零, 又

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left| \left(1 + 2\cos \frac{n\pi}{4}\right)^n \right| \cdot \frac{1}{3^n} &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n < 5. \end{aligned}$$

由狄里克雷判别法知, 级数 ① 收敛. 综上所述, 当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时, 原级数是由一个发散级数和七个收敛级数依次相加而得到的, 因此, 它是发散的.

【2830】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$

解 令 $a_n = \frac{1}{2^n},$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1,$

知收敛半径为 $R = 1$, 当 $|x| = 1$ 时, 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(\pm 1)^{n^2}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

收敛, 于是收敛区间为 $[-1, 1]$.

【2831】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ (普林斯海姆级数)

解 令 $a_n = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n},$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$

知收敛半径 $R = 1$, 收敛区间的端点为 $x = \pm 1$.

(1) $x = 1$ 情形, 此时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$, 由 2672 题知, 该级

数条件收敛.

(2) $x = -1$ 情形, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}] + n}}{n}, \quad (1)$$

令 $A_l = \{n \mid [\sqrt{n}] = l\}, (l = 1, 2, \dots),$

于是 A_l 中的元素可表示为

$$n = l^2 + s, s = 0, 1, 2, \dots, 2l.$$

设

$$\begin{aligned} u_l &= \sum_{n \in A_l} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}] + n}}{n} \\ &= \sum_{s=0}^{2l} \frac{(-1)^{l^2 + l + s}}{l^2 + s} = \sum_{s=0}^{2l} \frac{(-1)^s}{l^2 + s} \\ &= \frac{1}{l^2} - \left(\frac{1}{l^2 + 1} - \frac{1}{l^2 + 2} \right) - \dots \\ &\quad - \left(\frac{1}{l^2 + 2l - 1} - \frac{1}{l^2 + 2l} \right) \\ &\leq \frac{1}{l^2}, (l = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

由于 $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$ 收敛, 于是 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 收敛. 又当 $i \neq j$ 时, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

所以 $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$, 易知级数 ① 与级数 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 有相同的敛散性, 于是级数 ① 收敛.

【2832】 求超越几何级数的收敛域:

$$\begin{aligned} &1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots \\ &+ \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} x^n + \dots \end{aligned}$$

解 令

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)},$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = 1,$$

知收敛半径 $R = 1$, 收敛区间的端点为 $x = \pm 1$.

当 $x = 1$ 时, 此时级数为

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \dots \\ + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} + \dots,$$

$$\text{由 } \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad (|\theta_n| \leq L),$$

知, 当 $\gamma - \alpha - \beta + 1 > 1$, 即 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时, 级数收敛; 当 $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$ 时, 级数发散.

当 $x = -1$ 时, 由

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 + \gamma - \frac{\alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

知, 当 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时, 级数绝对收敛; 当 $\gamma - \alpha - \beta < -1$ 时, 存在

$n_0 > 0$, 当 $n > n_0$ 时, 有 $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < 1$, 即 $|a_n| < |a_{n+1}|$, 于是 $a_n \nrightarrow 0$,

级数发散; 当 $-1 < \gamma - \alpha - \beta$ 时, 级数去掉有限项后, 成为交错级数, 且每项的绝对值单调递减, 求通项(绝对值)的极限可写成无

穷乘积 $\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}$, 由

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta'_n}{n^2} \right) = -\infty,$$

$$(|\theta'_n| \leq M),$$

于是无穷乘积的值为零, 即 $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 由此, 级数收敛. 当 $\gamma - \alpha - \beta = -1$ 时, 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\theta'_n}{n^2},$$

知无穷乘积的值 $\neq 0$. 于是 $a_n \nrightarrow 0$, 级数发散. 综上所述, 超越几何级数的敛散情况如下:

$ x < 1$		绝对收敛
$ x > 1$		发散
$x = 1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	绝对收敛
	$\gamma - \alpha - \beta \leq 0$	发散
$x = -1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	绝对收敛
	$-1 < \gamma - \alpha - \beta \leq 0$	条件收敛
	$\gamma - \alpha - \beta \leq -1$	发散

求出下列广义幂级数的收敛域(2833 ~ 2837).

【2833】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$

解 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2n+3} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n+1}}{\frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n} \right| = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|,$$

知, 当 $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$, 即 $x > 0$ 时, 级数绝对收敛; 当 $x < 0$ 时, $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| > 1$, 级数发散; 当 $x = 0$ 时, 此时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$, 发散.

于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$ 的收敛域为 $(0, +\infty)$.

【2834】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}.$

解 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{x^{n+1}} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left| \frac{1}{x} \right| \cdot \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^n}} \right] = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{x} \right|,$$

知, 当 $\left| \frac{1}{2x} \right| < 1$, 即 $|x| > \frac{1}{2}$ 时, 级数绝对收敛; 当 $|x| < \frac{1}{2}$, 有

$\left|\frac{1}{2x}\right| > 1$, 级数发散; 当 $|x| = \frac{1}{2}$ 时, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} = \pi \neq 0,$$

知级数发散. 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}$ 的收敛域为 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 及 $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

【2835】 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}.$

解 由

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{x^n}{2^{n^2}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} \frac{1}{x^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}, \end{aligned}$$

知, 我们只要考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} \frac{1}{x^n}$ 的收敛域, 对级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$ 而言, 由 2815 题知, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$; 对于级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} \cdot \frac{1}{x^n}$, 收敛域为 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$. 由此, 级数

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}} x^n$ 的收敛域为 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$.

【2836】 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}.$

解 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} e^{-x} = e^{-(1+x)},$$

知, 当 $e^{-(1+x)} < 1$, 即 $1+x > 0$ 时, 级数绝对收敛; 当 $e^{-(1+x)} > 1$, 即 $1+x < 0$ 时, 级数发散; 当 $x = -1$ 时, 级数为

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^n$, 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right]^n = 1 \neq 0,$$

于是该级数发散. 综上所述, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$ 的收敛域为 $(-1, +\infty)$.

【2837】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \tan^n x.$

解 令 $a_n = \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!},$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2} = 1,$

知, 当 $|\tan x| < 1$, 即当 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ 时, 级数绝对收敛;

当 $|x - k\pi| > \frac{\pi}{4}$ 时, 级数发散; 当 $|x - k\pi| = \frac{\pi}{4}$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} (\pm 1)^n, \text{ 因为}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2} < 1,$$

于是 $a_n < a_{n+1}$, 故 $a_n \nrightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 级数发散. 于是, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \tan^n x \text{ 的收敛域为 } \left\{ x \mid |x - k\pi| < \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

【2838】 把函数 $f(x) = x^3$, 按照二项式 $x+1$ 的非负整数幂展开.

解 $f(x) = x^3 = [(x+1) - 1]^3$
 $= (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1.$

【2839】 把函数:

$$f(x) = \frac{1}{a-x} \quad (a \neq 0),$$

展开成幂级数:(1)按照 x 幂;(2)按照二项式幂 $x-b$,这里 $b \neq a$;
(3)按照 $\frac{1}{x}$ 幂.指出相应的收敛域.

$$\text{解} \quad (1) f(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}},$$

收敛域为 $|x| < |a|$.

$$\begin{aligned} (2) f(x) &= \frac{1}{a-b-(x-b)} \\ &= \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-b}{a-b}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}, \end{aligned}$$

收敛域为 $|x-b| < |a-b|$.

$$\begin{aligned} (3) f(x) &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{a}{x} - 1} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{x}} \\ &= -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}}, \end{aligned}$$

收敛域为 $|x| > |a|$.

【2840】把函数 $f(x) = \ln x$ 按照差 $x-1$ 的非负整数幂展开,并说明展开式的收敛区间.

求出级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

$$\text{解} \quad f(x) = \ln(1 + (x-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n},$$

收敛域为 $|x-1| < 1$, 即 $0 < x < 2$. 当 $x-1=1$ 时, 级数为

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, 收敛; 于是当 $0 < x \leq 2$ 时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$ 收敛. 因为 $\ln x$ 在 $x=2$ 处连续, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

按照变量 x 的非负整数幂写出下列函数的展开式并求出相应的收敛区间(2841 ~ 2846).

【2841】 $f(x) = \operatorname{sh} x$.

$$\begin{aligned}\text{解 } f(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\end{aligned}$$

收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

【2842】 $f(x) = \operatorname{ch} x$.

$$\text{解 } f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

【2843】 $f(x) = \sin^2 x$.

$$\begin{aligned}\text{解 } f(x) &= \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!},\end{aligned}$$

收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

【2844】 $f(x) = a^x \quad (a > 0)$.

$$\text{解 } f(x) = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n,$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\ln^n a}{n!} \right|} = |\ln a| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

所以收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

【2845】 $f(x) = \sin(\mu \arcsin x)$.

解 由

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^4 + \cdots \right) dt \\ &= x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \cdots, (|x| < 1),\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} f(x) &= \mu \arcsin x - \frac{\mu^3}{3!} (\arcsin x)^3 + \frac{\mu^5}{5!} (\arcsin x)^5 - \cdots \\ &= \mu x + \frac{\mu(1-\mu^2)}{3!} x^3 + \frac{\mu(1-\mu^2)(3^2-\mu^2)}{5!} x^5 + \cdots, \end{aligned}$$

收敛区间为 $(-1, 1)$.

【2846】 $f(x) = \cos(\mu \arcsin x)$.

解
$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{\mu^2}{2!} (\arcsin x)^2 + \frac{\mu^4}{4!} (\arcsin x)^4 - \cdots \\ &= 1 - \frac{\mu^2}{2!} x^2 - \frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{4!} x^4 - \cdots, \end{aligned}$$

收敛区域为 $(-1, 1)$.

【2847】 按照差 $x-1$ 的非负整数幂写出函数 $f(x) = x^x$ 展开式的前三项.

解 由 $f(x) = x^x$ 知, $f(1) = 1$, 又

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^x(1 + \ln x), f'(1) = 1, \\ f''(x) &= x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1}, f''(1) = 2, \\ f'''(x) &= x^x(x + \ln x)^3 + 2x^{x-1} \\ &\quad + x^{x-1} \left(\ln x + \frac{x-1}{x} \right), \\ f'''(1) &= 3, \end{aligned}$$

有
$$f(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \cdots,$$

收敛区间为 $|x-1| < 1$, 即 $0 < x < 2$.

【2848】 按照变量 x 的非负整数幂写出函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} (x \neq 0)$ 及 $f(0) = e$ 展开式的前三项.

解 由 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}, f(0) = e$,

有
$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)} \right] \\ &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right] \\ &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right], (x \neq 0). \end{aligned}$$

因为 $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$,

ξ 介于 0 与 x 之间, 有

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} f'(\xi) = -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{x^3} \ln(1+x) - \frac{1}{x^2(1+x)} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2} \right\} \\ &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + o(x) \right\}, (x \neq 0). \end{aligned}$$

同理 $f''(0) = \frac{11}{12}e$,

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^3 \right. \\ &\quad + 3 \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right] \\ &\quad \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + o(x) \right] \\ &\quad + \left[-\frac{6}{x^4} \ln(1+x) + \frac{2}{x^3(1+x)} + \frac{4}{x^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{(1+x)^3} \right] \left. \right\}, (x \neq 0). \end{aligned}$$

同理有 $f'''(0) = -\frac{21}{8}e$, 于是, 前三项是 $e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \cdots\right)$, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

【2849】 把函数 $\sin(x+h)$ 和 $\cos(x+h)$ 按照变量 h 的非负整数幂展开.

解 $\sin(x+h) = \sin x \cosh + \cos x \sinh$

$$\begin{aligned}
 &= \sin x \left(1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots \right) + \cos x \left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \cdots \right) \\
 &= \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \cdots,
 \end{aligned}$$

类似地有

$$\cos(x+h) = \cos x - h \sin x - \frac{h^2}{2!} \cos x + \frac{h^3}{3!} \sin x + \cdots,$$

收敛区间皆为 $(-\infty, +\infty)$.

【2850】 确定以下函数幂级数的展开式收敛区间:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

(1) 按照 x 幂; (2) 按照二项式 $(x-5)$ 的幂.

解 (1) 由

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{3}},
 \end{aligned}$$

又 $\frac{1}{1 - \frac{x}{2}}$ 展式的收敛区间为 $(-2, 2)$, $\frac{1}{1 - \frac{x}{3}}$ 展式的收敛区间为

$(-3, 3)$. 于是我们有 $f(x)$ 按 x 幂展开的收敛区间为 $(-2, 2)$.

(2) 由

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{3}{(x-5)+2} - \frac{2}{(x-5)+3} \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-5}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-5}{3}}
 \end{aligned}$$

又 $\frac{1}{1 + \frac{x-5}{2}}$ 展式的收敛区间为 $\{x \mid |x-5| < 2\}$, $\frac{1}{1 + \frac{x-5}{3}}$ 展式

的收敛区间为 $\{x \mid |x-5| < 3\}$. 我们有 $f(x)$ 关于 $x-5$ 幂展开的收敛区间为 $(3, 7)$.

利用基本展开式 I—V, 写出下列函数关于 x 的幂级数的展

开式(2851 ~ 2868).

【2851】 e^{-x^2} .

$$\text{解 } e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, (x \in (-\infty, +\infty)).$$

【2852】 $\cos^2 x$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, (|x| < +\infty). \end{aligned}$$

【2853】 $\sin^3 x$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \\ &= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n} - 1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \\ &\quad (x \in (-\infty, +\infty)). \end{aligned}$$

【2854】 $\frac{x^{10}}{1-x}$.

$$\text{解 } \frac{x^{10}}{1-x} = x^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=10}^{\infty} x^n, (x \in (-1, 1)).$$

【2855】 $\frac{1}{(1-x)^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{1}{(1-x)^2} &= (1-x)^{-2} \\ &= 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{(-2)(-2-1)\dots(-2-n+1)}{n!}(-x)^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

【2856】 $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$

解 $\frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$$= x \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3 + \dots \right]$$

$$= x + x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2!}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!}x^4 + \dots$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 级数为 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 由

2689 题知, 该级数收敛.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ 无定义, 于是

$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1}, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

【2857】 $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

解 $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in (-1, 1).$$

【2858】 $\frac{x}{1+x-2x^2}$

提示: 把已知分式化为最简有理分式.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{x}{1+x-2x^2} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n \right] \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).
 \end{aligned}$$

$$\text{【2859】} \quad \frac{12-5x}{6-5x-x^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{12-5x}{6-5x-x^2} &= \frac{1}{1-x} + \frac{6}{6+x} \\
 &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+\frac{x}{6}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{6^n} \right] x^n, x \in (-1, 1).
 \end{aligned}$$

$$\text{【2860】} \quad \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad &\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} \\
 &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) - \frac{1+(-1)^n}{2} \right] x^n \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n + \frac{1-(-1)^n}{2} \right] x^n, x \in (-1, 1).
 \end{aligned}$$

$$\text{【2861】} \quad \frac{1}{1-x-x^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{1}{1-x-x^2} &= \frac{1}{\frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} + \left(x + \frac{1}{2}\right)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{2}{\sqrt{5}-1} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}-1} x \right)^{-1} + \frac{2}{\sqrt{5}+1} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1} x \right)^{-1} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1} \right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{2}{\sqrt{5}+1} \right)^{n+1} \right] x^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} \right] x^n, \\
&\qquad\qquad\qquad x \in \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)
\end{aligned}$$

【2862】 $\frac{1}{1+x+x^2}$

解
$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x+x^2} &= \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\frac{1}{x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{x + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}} \right] \\
&= \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} x \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} x \right)^{-1} \right] \\
&= \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} x^n \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} x^n \right] \\
&= \frac{1}{i\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} \right] x^n,
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&(-1)^n \left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} \right] \\
&= (-1)^n \left[\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{n+1} \right. \\
&\quad \left. - \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{n+1} \right] \\
&= (-1)^n \left[\left(\cos \frac{n+1}{3} \pi + i \sin \frac{n+1}{3} \pi \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\cos \frac{n+1}{3} \pi - i \sin \frac{n+1}{3} \pi \right) \Big] \\
& = (-1)^n 2i \sin \frac{n+1}{3} \pi \\
& = 2i(-1)^n \sin \left[(n+1)\pi - \frac{2(n+1)}{3} \pi \right] \\
& = 2i \cdot (-1)^n \left[-\cos(n+1)\pi \sin \frac{2(n+1)}{3} \pi \right] \\
& = 2i \cdot (-1)^n \cdot (-1) \cdot (-1)^{n+1} \sin \frac{2(n+1)}{3} \pi \\
& = 2i \sin \frac{2(n+1)}{3} \pi,
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x+x^2} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin \frac{2(n+1)}{3} \pi, \\
|x| &< \min \left(\frac{2}{|1+i\sqrt{3}|}, \frac{2}{|1-i\sqrt{3}|} \right) = 1.
\end{aligned}$$

【2862. 1】 $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$, $f^{1000}(0)$ 等于多少?

解
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x+x^2+x^3} \\
&= \frac{1-x}{1-x^4} = \frac{1}{1-x^4} - \frac{x}{1-x^4} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} - x \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n+1} \\
&= 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + x^{12} - x^{13} + \dots, \\
&\qquad\qquad\qquad x \in (-1, 1).
\end{aligned}$$

$$f^{1000}(0) = 1.$$

【2863】 $\frac{x \cos \alpha - x^2}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$.

解
$$\begin{aligned}
& \frac{x \cos \alpha - x^2}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} \\
&= -1 - \frac{1}{2} \left[\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{x - (\cos \alpha + i \sin \alpha)} + \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{x - (\cos \alpha - i \sin \alpha)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - x(\cos\alpha - i\sin\alpha)} + \frac{1}{1 - x(\cos\alpha + i\sin\alpha)} \right] \\
&= -1 + \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x^n (\cos n\alpha - i\sin n\alpha + \cos n\alpha + i\sin n\alpha) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha,
\end{aligned}$$

其中 $|x| < \min\left(\frac{1}{|\cos\alpha + i\sin\alpha|}, \frac{1}{|\cos\alpha - i\sin\alpha|}\right) = 1$

【2864】 $\frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$

解 $\frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ix}{2} \left[\frac{1}{x - (\cos\alpha - i\sin\alpha)} - \frac{1}{x - (\cos\alpha + i\sin\alpha)} \right] \\
&= \frac{ix}{2} \left[-\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{1 - x(\cos\alpha + i\sin\alpha)} + \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{1 - x(\cos\alpha - i\sin\alpha)} \right] \\
&= \frac{ix}{2} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha - i\sin\alpha)^{n+1} \right] \\
&= \frac{ix}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n [-\cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha \\
&\quad + \cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \sin(n+1)\alpha \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin n\alpha, \text{ 其中 } x \in (-1, 1).
\end{aligned}$$

【2865】 $\frac{x\operatorname{sh}\alpha}{1 - 2x\operatorname{ch}\alpha + x^2}$

解 $\frac{x\operatorname{sh}\alpha}{1 - 2x\operatorname{ch}\alpha + x^2}$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha}{x - (\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha)} - \frac{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha}{x - (\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{e^a}{x - e^a} - \frac{e^{-a}}{x - e^{-a}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - xe^a} - \frac{1}{1 - xe^{-a}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{na} - \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-na} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{sh} na,
\end{aligned}$$

其中 $|x| < \min(e^{-a}, e^a) = e^{-|a|}$.

【2866】 $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

解 $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!} (-x^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, x \in (-1, 1).
\end{aligned}$$

【2867】 $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

解 $\ln(1+x+x^2+x^3)$

$$\begin{aligned}
&= \ln[(1+x)(1+x^2)] \\
&= \ln(1+x) + \ln(1+x^2),
\end{aligned}$$

又 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1],$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}, x \in [-1, 1],$$

于是, 当 $-1 < x \leq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\ln(1+x+x^2+x^3) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]-1} (1+(-1)^m) \frac{x^m}{m}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} + (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]-1} (1 + (-1)^m)}{m} x^m.$$

【2868】 $e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$.

解 由

$$e^{x \cos \alpha + ix \sin \alpha} = e^{x(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = e^{x e^{i\alpha}},$$

知 $e^{x e^{i\alpha}}$ 的实部为 $e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$. 而

$$\begin{aligned} e^{x e^{i\alpha}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x e^{i\alpha})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{in\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (\cos n\alpha + i \sin n\alpha), \end{aligned}$$

比较上式两端的实部有

$$e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!} x^n, x \in (-\infty, +\infty).$$

首先展开导函数, 用分项积分法求得下列函数的幂级数展开式(2869 ~ 2872).

【2869】 $f(x) = \arctan x$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和.

$$\begin{aligned} \text{解 } \arctan x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \end{aligned}$$

收敛半径 $R=1$, 当 $|x|=1$ 时, 该级数为交错级数且满足莱布尼兹判别法, 所以级数的收敛域为 $[-1, 1]$, 令 $x=1$ 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

注: 上述级数的逐项积分条件是满足的, 事实上, 当 $|x| < 1$,

$t \in [0, x]$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$ 是一致收敛的, 又各项皆连续. 以下各题类似, 不再逐一说明.

【2870】 $f(x) = \arcsin x$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right) dt \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\end{aligned}$$

易知上述级数收敛半径为 $R=1$, 当 $|x|=1$ 时, 由 2604 题知级数收敛. 于是

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

【2871】 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

级数收敛半径为 $R=1$. 当 $|x|=1$ 时, 由 2870 知, 级数绝对收敛. 因此

$$\begin{aligned}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].\end{aligned}$$

【2872】 $f(x) = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2) &= \int_0^x \frac{2t - 2\cos\alpha}{1 - 2t\cos\alpha + t^2} dt \\ &= -2 \int_0^x \frac{1}{t} \cdot \frac{t\cos\alpha - t^2}{1 - 2t\cos t + t^2} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \int_0^x \left(\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\alpha \right) dt && (2863 \text{ 题的结论}) \\
 &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n,
 \end{aligned}$$

该级数的收敛半径为 $R=1$, 当 $|x|=1$ 时, 由 2698 题知, 当 $0 < \alpha < \pi$ 时, 该级数收敛. 于是, 当 $\alpha \in (0, \pi)$ 时, 级数的收敛区间为 $[-1, 1]$. 又当 $\alpha=0, x=1$ 时, 级数发散; 当 $\alpha=0, x=-1$ 时, 级数条件收敛; 当 $\alpha=\pi, x=1$ 时, 级数条件收敛; 当 $\alpha=\pi, x=-1$ 时, 级数发散.

【2873】 运用各种方法, 求出下列函数的幂级数展开式:

(1) $f(x) = (1+x)\ln(1+x);$

(2) $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x;$

(3) $f(x) = \arctan \frac{2-2x}{1+4x};$

(4) $f(x) = \arctan \frac{2x}{2-x^2};$

(5) $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2};$

(6) $f(x) = \arccos(1-2x^2);$

(7) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2};$

(8) $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$

解 (1) $f(x)$

$$\begin{aligned}
 &= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\
 &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, (x \in (-1, 1)).
 \end{aligned}$$

当 $|x|=1$ 时, 该级数是交错级数且满足莱布尼兹条件, 级数收敛. 所以, 级数的收敛域为 $x \in [-1, 1]$.

(2) 由 2857 题和 2869 题结论知

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, \quad (x \in (-1, 1)).$$

$$(3) f'(x) = \left(\arctan \frac{2-2x}{1+4x} \right)' = -\frac{2}{1+4x^2},$$

于是有 $\arctan \frac{2-2x}{1+4x}$

$$= -2 \int_0^x \frac{dt}{1+4t^2} + \arctan 2$$

$$= \arctan 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

当 $|x| = \frac{1}{2}$ 时, 此时级数为交错级数, 且满足莱布尼兹判别

法条件, 级数收敛, 收敛域为 $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

$$(4) \text{ 由 } f'(x) = \left(\arctan \frac{2x}{2-x^2} \right)' = \frac{4+2x^2}{4+x^4},$$

$$\begin{aligned} \text{有 } \arctan \frac{2x}{2-x^2} &= \int_0^x \frac{4+2t^2}{4+t^4} dt \\ &= \int_0^x \left[\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t^4}{4}\right)^n \right] dt \\ &= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n}{2}\right] \frac{t^{2n}}{2^n} \right] dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n}{2}\right] \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}). \end{aligned}$$

当 $|x| = \sqrt{2}$ 时, 级数为

$$\pm \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n}{2}\right] \frac{1}{2n+1}, \quad \textcircled{1}$$

它们皆由两收敛级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n+1},$$

$$\text{和 } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+3},$$

逐项相加后分别乘以 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$ 得到,故级数①收敛,因此,原级数的收敛域为 $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

(5) 由 2869 题结论有

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

当 $|x|=1$ 时,此时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n-1)}$,收敛,于是,级数的收敛域为 $x \in [-1, 1]$.

(6) 由

$$f'(x) = [\arccos(1-2x^2)]' = \frac{2\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

有

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ \arccos(1-2x^2) &= 2\operatorname{sgn}x \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= 2\operatorname{sgn}x \cdot \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt \\ &= 2\operatorname{sgn}x \cdot \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right] \\ &= 2|x| \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1} \right], \\ &\quad x \in (-1, 1). \end{aligned} \tag{①}$$

当 $|x|=1$ 时,此时级数为

$$2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \right],$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1},$

由拉阿比判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1,$$

知收敛. 因此, 级数 ① 的收敛域为 $x \in [-1, 1]$.

(7) 由 2870 题知

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right] \\ &\quad + \left[1 - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n+2} \right] \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1}, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}, \quad \text{①}$$

由拉阿贝判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2 + 11n}{(2n+1)^2} = \frac{5}{2} > 1,$$

知级数 ① 收敛, 于是原级数的收敛域为 $x \in [-1, 1]$.

(8) 由 2871 题结论知

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right] \\ &\quad - \left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n+2} \right] \\ &= -1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1}, \\ &\quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

【2874】 利用展开式

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots$$

的唯一性, 求出下列函数的 n 阶导数:

$$(1) f(x) = e^{x^2};$$

$$(2) f(x) = e^{\frac{a}{x}};$$

$$(3) f(x) = \arctan x.$$

解 (1) $f(x+h) - f(x)$

$$= e^{(x+h)^2} - e^{x^2} = e^{x^2} (e^{2xh+h^2} - 1)$$

$$= e^{x^2} \left[(2xh + h^2) + \frac{1}{2!} (2xh + h^2)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{n!} (2xh + h^2)^n + \dots \right],$$

其中 h^n 的系数为

$$e^{x^2} \left[\frac{1}{n!} (2x)^n + \frac{1}{(n-1)!} C_{n-1}^1 (2x)^{n-2} + \frac{1}{(n-2)!} C_{n-2}^2 (2x)^{n-4} + \dots \right] \\ = \frac{e^{x^2}}{n!} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots \right],$$

将 $f(x+h) - f(x)$ 的展式中 h^n 的系数 $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ 与上式比较有

$$(e^{x^2})^{(n)} = e^{x^2} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots \right].$$

$$(2) f(x+h) - f(x) = e^{\frac{a}{x+h}} - e^{\frac{a}{x}}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \left(e^{-\frac{ah}{x(x+h)}} - 1 \right) = e^{\frac{a}{x}} \left(e^{-\frac{h}{x} \cdot \frac{a}{x+h}} - 1 \right)$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \left(e^{-\frac{ah}{x^2} - \frac{ah^2}{x^3} - \frac{ah^3}{x^4} - \dots - (-1)^{n-1} \frac{ah^{n-1}}{x^{n-2}} + \dots} - 1 \right)$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}} \right]^m \right\}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m! x^m} \sum_{k_1=0}^{\infty} (-1)^{k_1+1} \left(\frac{h}{x} \right)^{k_1+1}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_2+1} \left(\frac{h}{x}\right)^{k_2+1} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} (-1)^{k_m+1} \left(\frac{h}{x}\right)^{k_m+1} \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m! x^m} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} (-1)^{k_1+\cdots+k_m+m} \cdot \left(\frac{h}{x}\right)^{k_1+k_2+\cdots+k_m+m} \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^m \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1 \right) (-1)^s \left(\frac{h}{x}\right)^s \right] \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^m \cdot \sum_{s=0}^{\infty} C_{s+m-1} (-1)^s \left(\frac{h}{x}\right)^s \right] \quad ① \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+s} a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^{m+s} C_{s+m-1} \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{s+m=n \\ s \geq 0, m \geq 1}} \frac{(-1)^n a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^n C_{n-1} \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} \left(\frac{h}{x}\right)^n \sum_{\substack{s+m=n \\ s \geq 0, m \geq 1}} C_{n-1} x^{n-m} \frac{a^m}{m!} \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}} h^n \sum_{s=0}^{n-1} C_{n-1}^s \frac{x^s a^{n-s}}{(n-s)!} \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n h^n
\end{aligned}$$

其中 $A_n = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s} x^s,$

于是, 比较 h^n 的系数有

$$\begin{aligned}
(e^{\frac{a}{x}})^{(n)} &= \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s} x^s \\
&= \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \left[a^n + \frac{n(n-1)}{1!} a^{n-1} x \right. \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-1)(n-2)}{2!} a^{n-2} x^2 \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{3!} a^{n-3} x^3 + \cdots \right].
\end{aligned}$$

注: (1) 式 $\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s \\ k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0}} 1 = C_{s+m-1}^s$ 证明如下:

令 $|t| < 1$, 由 $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$ 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-t}\right)^m &= \sum_{k_1=0}^{\infty} t^{k_1} \sum_{k_2=0}^{\infty} t^{k_2} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} t^{k_m} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} t^{k_1+k_2+\cdots+k_m} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1 \right) t^s = \sum_{s=0}^{\infty} P_s t^s, \end{aligned}$$

其中 $P_s = \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1$.

又 $\left(\frac{1}{1-t}\right)^m = (1-t)^{-m}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-s+1)}{s!} (-1)^s t^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{2s} \frac{m(m+1)\cdots(m+s-1)}{s!} t^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} C_{m+s-1}^s t^s, \end{aligned}$$

由幂级数展开式的惟一性有 $P_s = C_{m+s-1}^s$.

(3) 由 $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$,

$$\text{令 } y = \frac{\frac{h}{1+x^2}}{1 + \frac{x}{1+x^2}h},$$

有 $\frac{x+y}{1-xy} = x+h$,

于是 $f(x+h) - f(x) = \arctan(x+h) - \arctan x$

$$= \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \arctan x = \arctan y$$

$$= \arctan \left(\frac{h}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{1+x^2}h} \right),$$

由 2869 题知, 当 $y \in [-1, 1]$, 有

$$\arctan y = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{2m+1},$$

当 h 很小 (且 $|x| \leq 1$) 时, 有

$$\begin{aligned} y &= \frac{h}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{1+x^2}h} \\ &= \frac{h}{1+x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{1+x^2} h \right)^k, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &f(x+h) - f(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left[\frac{h}{1+x^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{1+x^2} h \right)^k \right]^m \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^m \cdot \\ &\quad \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m} \cdot \left(\frac{xh}{1+x^2} \right)^{k_1+k_2+\cdots+k_m} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^m \cdot \\ &\quad \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1 \right) (-1)^s \left(\frac{xh}{1+x^2} \right)^s \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^{m+s} x^s \cdot (-1)^s C_{m+s-1}^s \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m+s=n \\ m \geq 1, s \geq 0}} (-1)^{m+s} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^n \cdot \frac{x^s}{2m+1} C_{m+s-1}^s \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^n A_n, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{\substack{m+s=n \\ m \geq 1, s \geq 0}} \frac{x^s}{2m+1} C_{m+s-1}^s \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1}^s, (n=1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

比较 h^n 的系数, 有

$$\begin{aligned}
 (\arctan x)^{(n)} &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} A_n \\
 &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1}^s \\
 &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \left[\frac{1}{3} x^{n-1} + \frac{1}{5} (n-1) x^{n-2} + \cdots \right].
 \end{aligned}$$

【2875】 把函数 $f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$ 按照二项式 $x+1$ 的正整数幂展开.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } f(x) &= -\ln(1+(1+x)^2) \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (1+x)^{2n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{n},
 \end{aligned}$$

收敛域为 $x \in [-2, 0]$.

【2876】 把函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 按照变量 x 的负整数幂展开成幂级数.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } f(x) &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}, \quad |x| > 1.
 \end{aligned}$$

【2877】 把函数 $f(x) = \ln x$ 按照分数 $\frac{x-1}{x+1}$ 的正整数幂展开成幂级数.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } f(x) &= \ln \frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}} \\
 &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1}, \quad x > 0.
 \end{aligned}$$

(2857 题结论).

【2878】 把函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ 按照分数 $\frac{x}{1+x}$ 的正整数幂展开成幂级数.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad f(x) &= \frac{x}{1+x} \sqrt{1+x} \\
 &= \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}} \\
 &= \frac{x}{1+x} \left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{x}{1+x} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n\right] \\
 &= \frac{x}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, 有 $\left|\frac{x}{1+x}\right| < 1$, 级数收敛; 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 由 2689 题结论知, 级数条件收敛. 因此, 此级数的收敛域为 $x \geq -\frac{1}{2}$.

【2879】 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, 直接证明 $f(x)f(y) = f(x+y)$.

$$\begin{aligned}
 \text{证} \quad f(x)f(y) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s!k!} x^s y^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s+k=n} \frac{1}{s!k!} x^s y^k \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{s+k=n} \frac{n!}{s!k!} x^s y^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{s=0}^n C_n^s x^s y^{n-s} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n = f(x+y).
 \end{aligned}$$

由于上述级数在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 及 $y \in (-\infty, +\infty)$ 上绝对收敛, 于是级数重新组合是合理的.

【2880】 如果定义:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

及 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

证明: (1) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$; (2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

证 因为 $\sin x, \cos x$ 的幂级数展开在 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对收敛, 于是级数相乘、相加、减后形成的级数皆绝对收敛, 且可重新组合.

(1) $\sin x \cos x$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s}}{(2s)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{l+s=n \\ l \geq 0, s \geq 0}} (-1)^{l+s} \cdot \frac{x^{2l+2s+1}}{(2l+1)!(2s)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{2n+1} \cdot \sum_{\substack{l+s=n \\ l \geq 0, s \geq 0}} \frac{1}{(2l+1)!(2s)!} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n x^{2n+1}, \end{aligned}$$

其中 $A_n = \sum_{\substack{l+s=n \\ l \geq 0, s \geq 0}} \frac{1}{(2l+1)!(2s)!}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{2l+1+2s=2n+1 \\ l \geq 0, s \geq 0}} \frac{1}{(2l+1)!(2s)!} \\ &= \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{\substack{k_1+k_2=2n+1 \\ k_1 \text{—奇数} \\ k_2 \text{—偶数}}} \frac{(2n+1)!}{(k_1)!(k_2)!} \\ &= \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{k_1 \text{ 奇}, k_2 \text{ 偶}} + \sum_{k_1 \text{ 偶}, k_2 \text{ 奇}} \right) \\ &= \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} 2^{2n+1}. \end{aligned}$$

于是 $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \sin 2x.$

$$(2) \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{2(n_1+n_2)+2}}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \\
 &\quad + \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2} \frac{x^{2(k_1+k_2)}}{(2k_1)!(2k_2)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{2n+2} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \right] \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^m x^{2m} \sum_{\substack{k_1+k_2=m \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!} \right] \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} + \sum_{n=0}^{\infty} \\
 &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+2} A_n,
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_n &= \sum_{\substack{k_1+k_2=n+1 \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!} \\
 &\quad - \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \\
 &= \frac{1}{(2n+2)!} \left[\sum_{\substack{2k_1+2k_2=2n+2 \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{(2n+2)!}{(2k_1)!(2k_2)!} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2+1)=2n+2 \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{(2n+2)!}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \right] \\
 &= \frac{1}{(2n+2)!} \left[\sum_{k'=0,1,\dots,2n+2} C_{2n+2}^{k'} - \sum_{l=1,3,\dots,2n+1} C_{2n+2}^l \right] \\
 &= \frac{1}{(2n+2)!} \left[\sum_{s=0,2,\dots,2n+2} (-1)^s C_{2n+2}^s \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{s=1,3,\dots,2n+1} (-1)^s C_{2n+2}^s \right] \\
 &= \frac{1}{(2n+2)!} \sum_{s=0}^{2n+2} (-1)^s C_{2n+2}^s
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2n+2)!} (1+(-1))^{2n+2}$$

$$= 0, (n=0, 1, 2, \dots).$$

于是 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, x \in (-\infty, +\infty).$

【2881】 写出函数 $f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n+1} \right) \right]^{-1}$ 幂级数展开式中的若干项.

解
$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right)^{-1}$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right)^2$$

$$- \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right)^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{24} - \dots, x \in (-1, 1).$$

对函数的幂级数进行相应的运算, 求出下列函数幂级数的展开式(2882 ~ 2890).

【2882】 $f(x) = (1+x)e^{-x}.$

解
$$f(x) = (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n, x \in (-\infty, +\infty).$$

【2883】 $f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x}.$

解 当 $x \geq 0$ 时,

$$\operatorname{ch} \sqrt{x} = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right] x^{\frac{n}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

当 $x < 0$ 时

$$\operatorname{ch} \sqrt{x} = \cos \sqrt{|x|},$$

于是 $\operatorname{ch} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{|x|})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!},$

由此 $\operatorname{ch} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty).$

进而
$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - 2x + x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{3}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2n-4)!} \right] x^n, x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

【2884】 $f(x) = \ln^2(1-x).$

解
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{3(n-2)} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 1} \right] x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} \right) \frac{1}{n+1} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{1} \right) \frac{1}{n+1} \right] x^{n+1} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1}, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

当 $x = -1$ 时, 级数为

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{(-1)^{n+1}}{n+1},$$

由 $\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1}$

$$> \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \frac{1}{n+2}, n = 2, 3, \cdots,$$

且 $\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1} = \frac{c + \ln n + \varepsilon_n}{n+1} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty).$

知级数收敛, 当 $x = 1$ 时, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n+1}$ 发散, 且原级数为正项级数,

知 $2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1}$ 也发散.

于是, 级数 $2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的收敛域为 $x \in [-1, 1]$.

【2885】 $f(x) = (1+x^2)\arctan x$.

解 由 2869 题知

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) x^{2n+1} \\ &= x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1}, x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

【2886】 $f(x) = e^x \cos x$.

解 $e^x \cos x$ 为 $e^x (\cos x + i \sin x)$ 的实部. 又

$$\begin{aligned} e^x (\cos x + i \sin x) &= e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(1+i)x]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (1+i)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

比较上式两端的实部, 有

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n, x \in (-\infty, +\infty).$$

【2887】 $f(x) = e^x \sin x$.

解 由 2886 题知

$$e^x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n, x \in (-\infty, +\infty).$$

【2888】 $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$

解
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} (-1)^{n_1} x^{n_1} \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_2} \frac{x^{n_2+1}}{n_2+1} \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{n_1+n_2+1}}{n_2+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{n+1} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{n_2+1} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n \right], \end{aligned}$$

$$x \in (-1, 1).$$

当 $|x|=1$ 时, 通项的绝对值 ≥ 1 , 级数发散, 于是, 级数的收敛域为 $x \in (-1, 1)$.

【2889】 $f(x) = (\arctan x)^2.$

解
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \right)^2 \quad (\text{由 2869 题结论知}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{(2n-1) \cdot 1} + \frac{1}{(2n-3) \cdot 3} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 \cdot (2n-1)} \right] x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{1} \right) \frac{1}{2n} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2n} + \cdots + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2n-1} \right) \frac{1}{2n} \right] x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right) \frac{x^n}{n}, \end{aligned}$$

$$x \in (-1, 1).$$

【2890】 $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2.$

解 令

$$\varphi(x) = (\arcsin x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-1, 1).$$

则 $\varphi'(x) = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n, x \in (-1, 1).$

由 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0,$

有 $a_0 = a_1 = 0.$

又由 $\sqrt{1-x^2}\varphi'(x) = 2\arcsin x,$

有 $\sqrt{1-x^2}\varphi''(x) - \frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1).$

即 $(1-x^2)\varphi''(x) - x\varphi'(x) = 2, x \in (-1, 1).$

将 $\varphi(x)$ 的展开式代入, 且 $a_0 = a_1 = 0,$ 有

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n = 2,$$

也就是 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n x^n = 2.$

于是 $2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n]x^n = 2,$

$$x \in (-1, 1).$$

比较上式 x 的同次幂的系数有

$$a_2 = 1, a_3 = 0,$$

$$a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n, n \geq 2.$$

于是可得 $a_{2k+1} = 0,$

$$a_{2k+2} = \frac{2[(2k)!!]^2}{(2k+2)!} = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}, k = 0, 1, 2, \dots.$$

由此有 $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} x^{2k+2}, x \in (-1, 1).$

于是 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} x^{2k}, x \in (-1, 1).$

又该级数当 $x = \pm 1$ 时, 皆收敛, 左端函数在 $x = \pm 1$ 处连续, 于是上述展开当 $x = 1$ 及 $x = -1$ 时也成立.

根据函数变量 x 的正整数幂写出幂级数展开式(非零)的前三项:

【2891】 $f(x) = \tan x$.

解 由泰勒公式,有

$$f(x) = \tan x, f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \sec x, f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = 2\sec^2 x \tan x, f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \tan^2 x, f'''(0) = 2,$$

$$f^{(4)}(x) = 8\sec^4 x \tan x + 8\sec^2 x \tan^3 x + 8\sec^4 x \tan x,$$

$$f^{(4)}(0) = 0,$$

$$f^{(5)}(x) = 32\sec^4 x \tan^2 x + 8\sec^6 x + 16\sec^2 x \tan^4 x \\ + 24\sec^4 x \tan^2 x + 32\sec^4 x \tan^2 x + 8\sec^6 x,$$

$$f^{(5)}(0) = 16, \dots$$

于是
$$f(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \dots$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

【2892】 $f(x) = \operatorname{th} x$.

解 由幂级数展式的惟一性知,为求展开式可考虑在 $x = 0$ 点附近作幂级数展开,当 $|x|$ 很小,且幂级数中常数项为零时,其收敛的和是很小的,于是有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{1 + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)} \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \cdot \\ &\quad \left[1 - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)^2 - \dots\right] \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{24} + \dots\right) \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

参见 Bromwich 著《An Introduction to the Theory of Infinite Series》第十一章.

【2893】 $f(x) = \cot x - \frac{1}{x}$.

解 与 2892 类似, 考虑 $x \neq 0$ 且 $|x|$ 很小的情形, 于是有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \cdots \right) + \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \cdots \right)^2 + \cdots \right] - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + \frac{31}{15120}x^6 + \cdots \right) - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \cdots \right) \\ &= -\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \cdots, 0 < |x| < \pi. \end{aligned}$$

【2894】 设 $\sec x$ 的展开式为:

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

推导关于系数 E_n (欧拉数) 的递推关系.

解 由 $\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}$,

有 $1 = \cos x \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s+k=n} (-1)^k x^{2(k+s)} \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{s+k=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \right] x^{2n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{2n}.
 \end{aligned}$$

由幂级数展式的惟一性,有

$$A_0 = E_0 = 1,$$

又 $A_n = 0, (n = 1, 2, \dots),$

其中
$$\begin{aligned}
 A_n &= \sum_{k+s=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!}.
 \end{aligned}$$

由此递推关系是

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!} = 0, n = 1, 2, \dots.$$

如已知 E_0 , 由上式令 $n = 1$, 得 $E_1 - E_0 = 0$, 从而 $E_1 = E_0 = 1$, 由 E_0, E_1 , 令 $n = 2$, 又可推得 E_2, \dots , 如此等等.

【2895】 把函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \quad (|x| < 1)$ 展开

成幂级数

解 若 $x^2 + 2|tx| < 1$, 则函数 $f(x)$ 就有展开的可能性, 令 x^n 的系数为 $P_n(t)$, 则

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \\
 &= 1 + P_1(t)x + P_2(t)x^2 + \dots + P_n(t)x^n + \dots. \quad \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

下面确定 $P_n(t)$, 为此, 对 ① 式两端同时对 x 求导数, 有

$$\begin{aligned}
 &\frac{t-x}{(1-2tx+x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= P_1(t) + 2P_2(t)x + \dots + nP_n(t)x^{n-1} + \dots.
 \end{aligned}$$

把上式与 ① 式比较, 易得

$$\begin{aligned}
 &(1-2tx+x^2)(P_1 + 2P_2x + \dots + nP_nx^{n-1}) \\
 &= (t-x)(1 + P_1x + P_2x^2 + \dots + P_nx^n).
 \end{aligned}$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数, 有

$$P_1(t) = t,$$

$$2P_2(t) - 2tP_1(t) = tP_1(t) - 1,$$

...

$$(n+1)P_{n+1}(t) - 2ntP_n(t) + (n-1)P_{n-1}(t) \\ = tP_n(t) - P_{n-1}(t).$$

由此有

$$P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}, \quad \dots$$

$$P_{n+1}(t) = \frac{2n+1}{n+1}tP_n(t) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(t). \quad (2)$$

如 $n = 2$, 则由 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 可得

$$P_3(t) = \frac{5}{3}t \cdot \frac{3t^2 - 1}{2} - \frac{2}{3}t = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 2}t^3 - \frac{3}{2}t \\ = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \left[t^3 - \frac{3 \cdot 2}{2(2 \cdot 3 - 1)}t \right].$$

由数学归纳法, 利用 (2) 式有

$$P_n(t) = \frac{(2n-1)!!}{n!} \left[t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}t^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)}t^{n-4} - \dots \right], \\ (n \geq 1, \text{勒让德多项式}).$$

【2896】 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 写出函数 $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ 的展开式.

$$\text{解} \quad F(x) = \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1} x^{n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} x^{n_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} a_{n_1} \right) x^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) x^n, x \in (-1, 1).$$

【2897】 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 具有收敛半径 R_1 , 而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的

收敛半径为 R_2 , 则级数 (1) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)x^n$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ 具有什么样的收敛半径?

解 (1) 记 $A_n = a_n \pm b_n$, 则有

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|A_n|} &= \sqrt[n]{|a_n \pm b_n|} \leq \sqrt[n]{|a_n| + |b_n|} \\ &\leq \sqrt[n]{2\max(|a_n|, |b_n|)} \\ &= \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{\max(|a_n|, |b_n|)} \\ &= \sqrt[n]{2} \cdot \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|})\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt[n]{2} \cdot \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|})\} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{\max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|})\} \\ &= \max\{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}\} \\ &= \max\left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}\right),\end{aligned}$$

故
$$R \geq \frac{1}{\max\left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}\right)} = \min(R_1, R_2).$$

(2) 令 $B_n = a_n b_n$, 于是有

$$\sqrt[n]{|B_n|} = \sqrt[n]{|a_n| |b_n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|b_n|},$$

从而
$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|B_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|b_n|}\} \\ &\leq \{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}\} \cdot \{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}\} \\ &= \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1 R_2}\end{aligned}$$

故
$$R_1 \geq R_1 R_2.$$

【2898】 设

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

证明: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径满足以下不等式: $l \leq R \leq L$.

证 令 $l_1 = \frac{1}{l} \quad L_1 = \frac{1}{L}$

因为 $l \geq 0, L \geq 0$, 若 $l = 0$, 记 $l_1 = +\infty$, 若 $l = +\infty$, 记 $l_1 = 0$, L 与 l , 作同样规定, 显然 $L_1 \leq l_1$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ 满足

$$\frac{1}{1+\delta_1} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{1-\delta_2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

对相应的 δ_1, δ_2 , 存在 $m > 0$, 当 $n > m$ 时, 有

$$l \cdot (1 - \delta_2) < \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < L(1 + \delta_1),$$

即
$$\frac{1}{L} \cdot \frac{1}{1+\delta_1} < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{1-\delta_2}.$$

于是当 $n > m$ 时, 有

$$L_1 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < l_1 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

进一步, 当 $n > m$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{|a_n|}{|a_m|} &= \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdot \dots \cdot \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} \\ &< \left[l_1 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]^{n-m}, \end{aligned}$$

即
$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1} < \left(\frac{|a_m|}{l_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (1)$$

同理有
$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1} > \left(\frac{|a_m|}{L_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (2)$$

又若 $A > 0$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A} = 1$. 于是存在 $n_0 (> m)$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(\frac{|a_m|}{l_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}},$$

$$\left(\frac{|a_m|}{L_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} > 1 - \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 - \frac{\varepsilon}{2}}. \quad (3)$$

将③式代入①和②,有

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1} < 1 + \epsilon, \quad \frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1} > 1 - \epsilon.$$

于是有 $L_1(1 - \epsilon) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq l_1 \cdot (1 + \epsilon)$.

又若 $L_1 = +\infty$, 即 $L = 0$, 显然 $R = 0$, 级数除 $x_0 = 0$ 点收敛外, 对任一点 $x \neq x_0$ 均发散, 于是不妨设 $L_1 < +\infty$. 故有

$$\frac{1}{l_1(1 + \epsilon)} \leq R \leq \frac{1}{L_1(1 - \epsilon)},$$

即 $\frac{l}{1 + \epsilon} \leq R \leq \frac{L}{1 - \epsilon}$,

由 ϵ 的任意性, 有 $l \leq R \leq L$.

【2899】 证明: 若 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 且 $|n!a_n| < M (n = 1, 2, \dots)$. 其中 M 为常数, 则: (1) $f(x)$ 在任意点 a 上可无穷次微分, (2) 如下展开式成立:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

证 (1) 由 $|n!a_n| < M$, 有

$$|a_n| < \frac{M}{n!}, (n = 1, 2, \dots).$$

设 $[-N, N]$ 是包含 x_0 的任一有限区间, 由

$$|a_n(x - x_0)^n| \leq \frac{M}{n!} (2N)^n,$$

且 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!} (2N)^n$ 收敛, 知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 在包含 x_0 的任意有限区间上一致收敛, 于是, 该级数在 a 点无穷多次可微.

(2) 由(1)知

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上任意可微, 于是

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n (x-x_0)^{n-m}, (m=1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

现令 $|x-a| < R, (R > 0),$

于是 $|x-x_0| \leq |x-a| + |a-x_0|$
 $< R + |a-x_0| = L,$

故有 $|f^{(m)}(x)| \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} |a_n| \cdot L^{n-m}$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{M}{n!} L^{n-m} \\ &= M \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} = MP, (m=1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

其中 $P = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} < +\infty.$

考察余项 $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$

$$= \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1},$$

$(0 < \theta < 1).$

于是, 当 $|x-a| < R$ 时, 有

$$|R_n(x)| \leq \frac{MP}{(n+1)!} R^{n+1}, (n=1, 2, \cdots).$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$

于是当 $|x-a| < R$ 时

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

成立. 又由 R 的任意性有, 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 上式皆成立.

【2899. 1】 当 $x \in (a, b)$ 时, $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ 且 $|f^{(n)}(x)| \leq c^n (n = 0, 1, 2, \dots)$.

证明: 可把函数 $f(x)$ 展开成在区间 (a, b) 收敛的幂级数:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (x_0 \in (a, b)).$$

证 因为 $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$, 于是

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}, \\ &\qquad\qquad\qquad x_0 \in (a, b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \\ &\qquad\qquad\qquad x \in (a, b), x_0 \in (a, b). \end{aligned}$$

$$\text{又 } |f^{(n)}(x)| \leq c^n, \quad x \in (a, b).$$

$$\text{于是 } |R_n(x)| \leq \frac{c^{n+1} \cdot (b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[c(b-a)]^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[c(b-a)]^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

$$\text{从而 } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \quad x \in (a, b).$$

【2899. 2】 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 设 $f(x) \in C^{(\infty)}[-1, 1]$ 且 $f^{(n)}(x) \geq 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$.

证明: 在区间 $(-1, 1)$ 可把函数 $f(x)$ 展开成幂级数:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

提示:利用导数 $f^{(n)}(x)$ 的单调性,对于函数 $f(x)$ 泰勒级数的余项 $R_n(x)$,得出评估值:

$$|R_n(x)| \leq |x|^{n+1} f(1).$$

证 因为 $f(x) \in C^\infty[-1,1]$,有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, x \in (-1,1).$$

$$\text{令 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

又由 $f^{(n)}(x) \geq 0, (n=0,1,2,\dots).$

有 $f^{(n)}(x)$ 单调增加, $n=0,1,2,\dots$. 于是

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{|f^{(n)}(1)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|f^{(n)}(1)|}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, x \in (-1,1).$

于是 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in (-1,1).$

【2900】 证明:若(1) $a_n \geq 0$ 且(2) $\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$ 则

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S$ 存在

证 首先证明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛,用反证法,设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = +\infty$ 知,任给 $A > S$,存在 N ,有

$$\sum_{n=0}^N a_n R^n > A > S.$$

由 $\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^N a_n x^n = \sum_{n=0}^N a_n R^n > A > S,$

有任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (R - \delta, R)$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n > A - \varepsilon.$$

现令 $\varepsilon = \frac{A-S}{2}$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n x^n &> A - \varepsilon = A - \frac{A-S}{2} \\ &= \frac{1}{2}(A+S) > S. \end{aligned}$$

又 $a_n \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geq \sum_{n=0}^N a_n x^n, (x \geq 0).$$

我们有 $\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n > S$ 与假设 $\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$ 相矛盾. 于是级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 一定收敛. 由阿贝尔定理知, 函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

在点 $x = R$ 处左连续, 因此

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

展开成函数的幂级数:

【2901】 $\int_0^x e^{-t^2} dt.$

解
$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} \right] dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

【2902】 $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} &= \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{4n} \right] dt \\
 &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, \\
 &\quad x \in [-1, 1].
 \end{aligned}$$

$$\text{【2903】} \quad \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt &= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right] dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}, \\
 &\quad x \in (-\infty, +\infty).
 \end{aligned}$$

$$\text{【2904】} \quad \int_0^x \frac{\arctan x}{x} dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt &= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2n+1} \right] dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, x \in [-1, 1].
 \end{aligned}$$

$$\text{【2905】} \quad \int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} \quad (\text{写出前 4 项})$$

解 设 $0 < |t| < 1$, 由

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{t} \ln(1+t) &= \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} \\
 &= 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1} = 1 - \xi,
 \end{aligned}$$

$$\text{其中} \quad \xi = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}.$$

易知交错级数

$$\xi = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1},$$

当 $|t| < 1$ 时收敛, 且 $|\xi| < 1$. 于是有

$$\frac{1}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} = \frac{1}{1-\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n.$$

由此当 $|x| < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} &= \int_0^x \frac{dt}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} \\ &= \int_0^x \frac{dt}{1-\xi} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \right) dt. \end{aligned}$$

由题意, 要求四项近似, 于是取 t^3 足够了, 我们有

$$\xi^0 = 1,$$

$$\xi^1 = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4} - \dots,$$

$$\xi^2 = \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{3} + \dots,$$

$$\xi^3 = \frac{t^3}{8} - \dots,$$

...

于是
$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n = 1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24} - \dots.$$

从而当 $|x| < 1$ 时, 原积分的前四项为

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} &= \int_0^x \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24} \right) dt + O(x^5) \\ &= x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} + O(x^5). \end{aligned}$$

运用逐项微分法, 计算下列级数的和(2906 ~ 2910).

【2906】 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots.$

解 令 $F(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots,$

易知收敛域为 $x \in (-1, 1)$, 于是有

$$F'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}.$$

又 $F(0) = 0$, 有

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, x \in (-1, 1).$$

于是当 $|x| < 1$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

【2907】 $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$

解 设 $S(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$,

易知收敛域为 $x \in [-1, 1]$. 于是

$$S'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x^2}.$$

又 $S(0) = 0$, 有

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x,$$

于是, 当 $|x| \leq 1$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x.$$

【2908】 $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

解 设 $S(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$,

易知收敛域为 $x \in (-\infty, +\infty)$. 于是

$$S'(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

从而 $S(x) - S'(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = e^{-x}, \quad \textcircled{1}$

$$S(x) + S'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x. \quad \textcircled{2}$$

由①+②有

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

【2909】 $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$

解 设

$$S(x) = \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots,$$

易知收敛域为 $x \in [-1, 1]$, 有

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \dots \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} [-\ln(1-x)], 0 < |x| < 1. \end{aligned}$$

又 $S(0) = 0$, 有

$$S(x) = \int_0^x S'(t) dt = 1 - \frac{1-x}{x} \ln(1-x), 0 < |x| < 1.$$

当 $x = 0$ 时, 级数收敛到零; 当 $x = 1$ 时, 级数收敛到 1; 当 $x = -1$ 时, 级数收敛到 $1 - 2\ln 2$. 事实上

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \\ &= 2 \cdot \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots\right) + 1 \\ &= 1 - 2\ln 2. \end{aligned}$$

由此, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), & 0 < |x| < 1, \\ 0, & x = 0, \\ 1 - 2\ln 2, & x = -1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

【2910】 $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$

提示:把级数的导数乘以 $1-x$.

解 设

$$S(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots,$$

于是有

$$S'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}2x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}3x^2 + \dots.$$

用 $1-x$ 乘上式有

$$\begin{aligned} (1-x)S'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{2}S(x), \end{aligned}$$

于是有 $\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{1}{2(1-x)}.$

积分有 $\ln S(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x}},$

即
$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x}}, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

当 $x = 1$ 时,由拉阿贝判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

因此,级数发散.

当 $x = -1$ 时, 由 2689 题知, 级数条件收敛. 因此

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, x \in [-1, 1).$$

运用逐项积分法, 计算下列级数的和(2911 ~ 2913).

【2911】 $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$.

解 设 $S(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$,

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \int_0^x S(t) dt &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)x^4 + \cdots \\ &= (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right) \\ &= x(1 + x + x^2 + \cdots) - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right) \\ &= \frac{x}{1-x} + \ln(1-x), \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{从而} \quad S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \left(\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)\right)' \\ &= \frac{x}{(1-x)^2}, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数通项不趋于零, 级数发散.

【2912】 $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots$.

解 设

$$S(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots,$$

$$\begin{aligned} \text{由} \quad \int_0^x S(t) dt &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^4 - \frac{16}{5}x^5 + \cdots \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(2 + \frac{1}{4}\right)x^4 - \left(3 + \frac{1}{5}\right)x^5 + \cdots \\ &= x + \left(-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right) \\ &\quad - x^3(1 - 2x + 3x^2 - \cdots) \\ &= x - \ln(1+x) - x^3(x - x^2 + x^3 - \cdots)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x - \ln(1+x) - x^3 \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)' \\
 &= x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2}, x \in (-1, 1),
 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n \\
 &= \left[x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2} \right]' \\
 &= \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}, x \in (-1, 1).
 \end{aligned}$$

当 $|x|=1$ 时, 级数发散.

【2913】 $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$.

解 设

$$S(x) = 1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots,$$

由 $\int_0^x S(t) dt = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots$

$$\begin{aligned}
 &= x(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots) \\
 &= x \cdot \frac{x}{(1-x)^2} \quad (\text{同 2911 题结论}) \\
 &= \frac{x^2}{(1-x)^2}, x \in (-1, 1).
 \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \left(\frac{x^2}{(1-x)^2} \right)' \\
 &= \frac{2x}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1).
 \end{aligned}$$

当 $|x|=1$ 时, 级数发散.

【2914】 证明: 级数 $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)} = y$.

证 易知级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

由 $y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}, y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!},$

$$y''' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}, \quad y^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!},$$

有 $y^{(4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = y.$

【2915】 证明:级数 $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy'' + y' - y = 0.$

证 易知所给级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty).$

由 $y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)!},$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!},$$

有 $xy'' + y'$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!(n+1)!} + \frac{1}{n!(n+1)!} \right] x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = y,$$

从而 $xy'' + y' - y = 0.$

确定在复数域 ($z = x + iy$) 内下列幂级数的收敛半径和收敛圆(2916 ~ 2920).

【2916】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n \cdot 2^n}.$

解 令 $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n},$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 2,$

有收敛半径 $R = 2,$ 收敛圆为

$$|z-1-i| < 2,$$

即 $(x-1)^2 + (y-1)^2 < 2^2.$

【2917】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}.$

解 令

$$a_n = \frac{(1+i)^n}{n(n+1)},$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

有收敛半径 $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 收敛圆为 $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, 即 $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$.

$$\text{【2918】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}.$$

$$\text{解 令 } a_n = \frac{n!}{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)},$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1+(n+1)i|}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{n+1} = 1, \end{aligned}$$

知收敛半径 $R = 1$, 收敛圆为 $|z| < 1$, 即 $x^2 + y^2 < 1$.

$$\text{【2919】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}.$$

$$\text{解 令 } a_n = \frac{1}{n^{\alpha+i\beta}},$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\alpha+i\beta} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\alpha} = 1, \end{aligned}$$

知收敛半径 $R = 1$, 收敛圆为 $|z| < 1$, 即 $x^2 + y^2 < 1$.

$$\text{【2920】 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - e^{i\alpha})^n}{n(1 - e^{i\alpha})^n}.$$

$$\text{解 令 } a_n = \frac{1}{n(1 - e^{i\alpha})^n},$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} (1 - e^{i\alpha}) \right| \\ &= |1 - (\cos\alpha + i\sin\alpha)| = \sqrt{(1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} \\ &= \left| 2\sin \frac{\alpha}{2} \right|, \end{aligned}$$

知收敛半径 $R = \left| 2\sin \frac{\alpha}{2} \right|$, 收敛圆为

$$|z - e^{i\alpha}| < \left| 2\sin \frac{\alpha}{2} \right|,$$

即 $(x - \cos\alpha)^2 + (y - \sin\alpha)^2 < 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}.$

【2921】 利用牛顿二项式公式, 近似计算 $\sqrt[3]{9}$, 若取展开式的前三项, 估计所得的误差.

解 $\sqrt[3]{9} = 2\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{8^3} - \dots\right),$$

当取展式的头三项时, 误差

$$|R_3| < 2 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3^3} \cdot \frac{1}{8^3} = \frac{10}{3^4 \cdot 8^3} < 0.001.$$

估计头三项, 精确到四位小数, 有

$$\sqrt[3]{9} \doteq 2\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{2}{3^2} \cdot \frac{1}{8^2}\right) \doteq 2.080.$$

【2922】 近似计算

(1) $\arctan 1.2$; (2) $\sqrt[10]{1000}$; (3) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; (4) $\ln 1.25$.

并估计相应的误差.

解 (1) 由

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy},$$

令 $x = 1, \quad \frac{x+y}{1-xy} = 1.2,$

即 $y = \frac{1}{11}$, 于是

$$\begin{aligned} \arctan 1.2 &= \arctan 1 + \arctan \frac{1}{11} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{11} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{11}\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{11}\right)^5 - \dots \end{aligned}$$

若取头三项, 则其误差

$$|R_3| < \frac{1}{5} \left(\frac{1}{11} \right)^5 < 10^{-5}.$$

估计前三项, 每一项取到小数点后六位有

$$\arctan 1.2 = 0.87606.$$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt[10]{1000} &= \sqrt[10]{1024 - 24} = 2(1 - 0.024)^{\frac{1}{10}} \\ &= 2 \left[1 - \frac{0.024}{10} + \frac{\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} - 1 \right)}{2!} (0.024)^2 - \dots \right], \end{aligned}$$

又上述级数的各项递减, 今取三项, 则其误差

$$\begin{aligned} |R_3| &< 2 \cdot \frac{\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} - 1 \right) \left(\frac{1}{10} - 2 \right)}{3!} \cdot \\ &\quad (0.024)^3 [1 + 0.024 + (0.024)^2 + \dots] \\ &< 10^{-6}. \end{aligned}$$

估计前三项, 每一项取到小数点后七位有

$$\sqrt[10]{1000} \doteq 1.995263.$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{1}{\sqrt{e}} &= e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} \\ &\quad + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} - \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{2^6} - \dots, \end{aligned}$$

各取前七项, 则其误差

$$|R_7| < \frac{1}{7! 2^7} < 10^{-5},$$

估计前七项, 每一项取到小数点后六位, 即得

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \doteq 0.60653.$$

$$(4) \ln 1.25 = \ln \left(1 + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} - \frac{1}{4 \cdot 4^4} + \frac{1}{5 \cdot 4^5} - \frac{1}{6 \cdot 4^6} + \dots$$

若取前六项, 则其误差

$$|R_6| < \frac{1}{7 \cdot 4^7} < 10^{-5}.$$

估计前六项, 每一项取到小数点后六位, 即有

$$\ln 1.25 \doteq 0.22314.$$

利用相应的展开式, 以指定的精度计算以下函数的数值 (2923 ~ 2327).

【2923】 $\sin 18^\circ$, 精确到 10^{-5} .

$$\text{解 } \sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} - \dots,$$

该级数为交错级数, 若取前 n 项, 则其误差

$$R < \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}.$$

$$\text{现令 } \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1} < 10^{-5}.$$

今计算 $n=3$ 时即满足要求, 估计算前三项, 每一项取到小数点后六位, 有

$$\sin 18^\circ \doteq 0.30902.$$

【2924】 $\cos 1^\circ$, 精确到 10^{-6} .

$$\text{解 } \cos 1^\circ = \cos \frac{\pi}{180} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^4 - \dots,$$

经计算, 令 $n=2$, 有

$$R < \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^4 < 10^{-6},$$

于是有 $\cos 1^\circ \doteq 0.999848$.

【2925】 $\tan 9^\circ$, 精确到 10^{-3}

$$\text{解 } \tan 9^\circ = \tan \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{20} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{20}\right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{20}\right)^5 + \dots,$$

(2891 题结论).

若取前二项, 且上述级数的各项递减, 则其误差

$$R < \frac{5}{12} \left(\frac{\pi}{20} \right)^5 \left[1 + \left(\frac{\pi}{20} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{20} \right)^4 + \cdots \right] < 10^{-3}.$$

今计算前二项, 每一项取到小数点后四位, 有

$$\tan 9^\circ \doteq 0.158.$$

【2926】 e , 精确到 10^{-6}

解
$$e = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!},$$

今取 $1 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!}$ 作为 e 的近似值, 则其误差

$$\begin{aligned} R &= \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots m} \\ &< \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \frac{1}{n!n}, \end{aligned}$$

今 $\frac{1}{n!n} < 10^{-6}$, 即 $n!n > 10^6$. 经计算 $n=9$ 满足要求. 于是, 当每项取到小数点后七位, 有

$$e \doteq 1 + \sum_{n=1}^9 \frac{1}{n!} \doteq 2.718282.$$

【2927】 $\ln 1.2$, 精确到 10^{-4} .

解
$$\ln(1.2) = \ln(1+0.2)$$

$$= 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 - \frac{1}{4}(0.2)^4 + \cdots,$$

若取前 n 项, 则其误差

$$R < \frac{1}{n+1} (0.2)^{n+1}.$$

令
$$\frac{1}{n+1} (0.2)^{n+1} < 10^{-4},$$

经计算 $n=4$ 满足要求. 即

$$R < \frac{1}{5} (0.2)^5 < 10^{-4}.$$

于是, 当每项取到小数点后五位, 即有

$$\begin{aligned}\ln 1.2 &\doteq 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 - \frac{1}{4}(0.2)^4 \\ &\doteq 0.1823.\end{aligned}$$

【2928】 根据以下等式: $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$, 求出 π , 精确到 10^{-4} .

$$\begin{aligned}\text{解 } \pi &= 6 \arcsin \frac{1}{2} \\ &= 6 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right. \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2} \right)^7 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2} \right)^9 \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2} \right)^{11} + \dots \right].\end{aligned}$$

今取前六项, 且上述级数的各项递减, 则其误差

$$\begin{aligned}R &< 6 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot \frac{1}{13} \left(\frac{1}{2} \right)^{13} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \dots \right] < 10^{-4}.\end{aligned}$$

估计前六项, 每一项取到小数点后五位, 即

$$\pi \doteq 3.1416.$$

【2929】 利用恒等式:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3},$$

计算 π 数, 精确到 0.001.

解 由题意有

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} - \dots \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \dots \right).\end{aligned}$$

由于等式右端的两个级数皆是莱布尼兹型的, 于是在被加数与加数中, 省略的未写出的项的校正数分别为

$$0 < R_1 < \frac{4}{11 \cdot 2^{11}} < 0.0002,$$

$$0 < R_2 < \frac{4}{9 \cdot 3^9} < 0.0002.$$

于是,总误差 $R \leq R_1 + R_2 < 0.001$, 计算保留下来的项近似到小数点后四位,即可保证达到所需误差,列成下表(括号中的正、负号指示校正数的符号);

正项	负项
$\frac{4}{2} = 2.0000$	$\frac{4}{3 \cdot 2^3} = 0.1667 \quad (-)$
$\frac{4}{5 \cdot 2^5} = 0.0250$	$\frac{4}{7 \cdot 2^7} = 0.0045 \quad (-)$
$\frac{4}{9 \cdot 2^9} = 0.0009 \quad (-)$	$\frac{4}{3 \cdot 3^3} = 0.0494 \quad (-)$
$\frac{4}{3} = 1.3333 \quad (+)$	$ \begin{array}{r} +) \frac{4}{7 \cdot 3^7} = 0.0003 \quad (-) \\ \hline 0.2209 \end{array} $
$ \begin{array}{r} +) \frac{4}{5 \cdot 3^5} = 0.0033 \quad (-) \\ \hline 3.3625 \end{array} $	

又 $3.3625 + 3.1415 = 3.1416$,

从而 $3.1415 < \pi < 3.1420$.

因此,取 $\pi \doteq 3.142$. 准确到 0.001.

【2930】 利用恒等式:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239},$$

确定 π 数,精确到 10^{-9} .

解 首先说明恒等式的来源,由

$$\begin{aligned}
 & \arctan x + \arctan y \\
 &= \arctan \frac{x+y}{1-xy}, \left(|x+y| < \frac{\pi}{2} \right).
 \end{aligned}$$

令 $\frac{x+y}{1-xy} = 1$, 即 $(1+x)(1+y) = 2$, 于是有

$$\frac{\pi}{4} = \arctan x + \arctan y.$$

若令 $x = \frac{1}{2}$, 则 $y = \frac{1}{3}$ 有

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}.$$

这是 2929 题的恒等式. 若令 $x = \frac{1}{5}$, 记 $\arctan \frac{1}{5} = \alpha$, 有

$$\tan \alpha = \frac{1}{5},$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

$$\tan 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} \doteq 1.$$

令 $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4},$

则 $\tan \beta = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239},$

于是 $\beta = \arctan \frac{1}{239},$

从而 $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4\arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$

我们有
$$\begin{aligned} \pi &= 16\arctan \frac{1}{5} - 4\arctan \frac{1}{239} \\ &= 16 \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^9} - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{5^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{5^{13}} - \dots \right\} \\ &\quad - 4 \left\{ \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

省略的未写出的项的校正数分别为

$$0 < R_1 < \frac{16}{15 \cdot 15^{16}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^9},$$

$$0 < R_2 < \frac{4}{5 \cdot 239^5} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^9}.$$

这是因为上述两级数皆为莱布尼兹型交错级数. 于是, 总误差 $R \leq R_1 + R_2 < \frac{1}{10^9}$.

现计算保留下来的项近似到小数点后 10 位, 列成下表(括号中的 \pm 号表示校正数的符号):

$$\frac{16}{5} = 3.2000000000$$

$$\frac{16}{3 \cdot 5^3} = 0.0426666667 \quad (-)$$

$$\frac{16}{5 \cdot 5^5} = 0.0010240000$$

$$\frac{16}{7 \cdot 5^7} = 0.0000292571 \quad (+)$$

$$\frac{16}{9 \cdot 5^9} = 0.0000009102 \quad (+) \quad \begin{array}{r} +) \frac{16}{11 \cdot 5^{11}} = 0.0000000298 \quad (-) \\ \hline 0.0426959536 \end{array}$$

$$+) \frac{16}{13 \cdot 15^{13}} = 0.0000000010 \quad (+)$$

$$\begin{array}{r} 3.2010249112 \\ -) 0.0426959536 \\ \hline 3.1583289576 \end{array}$$

$$\frac{4}{239} = 0.0167364017 \quad (+)$$

$$+) \frac{4}{3 \cdot 239^3} = 0.000000977 \quad (-)$$

$$\begin{array}{r} 0.0167363040 \end{array}$$

故我们有

$$3.1583289576 < 16\alpha < 3.1583289577,$$

$$-0.0167363040 = -4\beta = -0.0167363040,$$

$$\pi = 16\alpha - 4\beta,$$

$$3.1415926536 < \pi < 3.1415926537.$$

由此, 按准确到 10^{-9} 的精度, $\pi \doteq 3.141592654$.

【2931】 利用公式:

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \cdots \right],$$

求出 $\ln 2$ 和 $\ln 3$, 精确到 10^{-5} .

解 当 $n = 1$ 时

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \cdots \right),$$

$$\text{省略的项 } R = 2 \left(\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3^{13}} + \cdots \right)$$

$$< \frac{2}{11 \cdot 3^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} < \frac{2}{10^6}.$$

计算到小数点后 6 位, 作出下表

$$\frac{2}{3} = 0.666667 \quad (-)$$

$$\frac{2}{3 \cdot 3^3} = 0.024691 \quad (+)$$

$$\frac{2}{5 \cdot 3^5} = 0.001646 \quad (+)$$

$$\frac{2}{7 \cdot 3^7} = 0.000131 \quad (-)$$

$$+) \frac{2}{9 \cdot 3^9} = 0.000011 \quad (+)$$

$$\hline 0.693146$$

于是 $0.693146 < \ln 2 < 0.693148$.

从而 $\ln 2 = 0.69314\cdots$, 并且所有写出来的五位数字都是精确的, 若将第六位四舍五入, 有 $\ln 2 \doteq 0.69315$. 准确到 10^{-5} .

令 $n = 2$, 有

$$\begin{aligned} \ln 3 = \ln 2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} \right. \\ \left. + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} + \cdots \right), \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

与 $\ln 2$ 一样, 计算取出的诸项到小数点后 6 位, 作出下表:

$$\frac{2}{5} = 0.400000$$

$$\frac{2}{3 \cdot 5^3} = 0.005333 \quad (+)$$

$$\frac{2}{5 \cdot 5^5} = 0.000128$$

$$\frac{2}{7 \cdot 5^7} = 0.000004 \quad (-)$$

$$\begin{array}{r} +) \frac{2}{9 \cdot 5^9} = 0.000000 \quad (+) \\ \hline 0.405465 \end{array}$$

从而①式右端的级数的和为 $0.40546\cdots$, 若将第 6 位四舍五入, 得 0.40547 . 最后, 由①式有

$$\ln 3 \doteq 0.693146\cdots + 0.405465\cdots = 1.09861\cdots,$$

若将第 6 位四舍五入有

$$\ln 3 \doteq 0.69315 + 0.40546 = 1.09861,$$

准确到 10^{-5} .

【2932】 用被积函数的级数展开式, 计算以下积分, 精确到 0.001:

$$(1) \int_0^1 e^{-x^2} dx;$$

$$(2) \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx;$$

$$(3) \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$(4) \int_0^1 \cos x^2 dx;$$

$$(5) \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx;$$

$$(6) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3};$$

$$(7) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}};$$

$$(8) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$$

$$(9) \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$$

$$(10) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx;$$

$$(11) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx;$$

$$(12) \int_0^1 x^x dx.$$

解 (1) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

$$= \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots \right) dx$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \cdots,$$

写出的项计算到小数点后四位,作下表:

$$\begin{array}{rcl}
 1 & = & 1.0000 \\
 \frac{1}{5 \cdot 2!} & = & 0.1000 \\
 +) \frac{1}{9 \cdot 4!} & = & 0.0046 \quad (+) \\
 \hline
 & & 1.1046 \\
 -) 0.3571 & & \\
 \hline
 & & 0.7475
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 \frac{1}{3} & = & 0.3333 \quad (+) \\
 +) \frac{1}{7 \cdot 3!} & = & 0.0238 \quad (+) \\
 \hline
 & & 0.3571
 \end{array}$$

于是 $0.7473 < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 0.7476$,

从而 $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.747$,

准确到 0.001.

$$\begin{aligned}
 (2) \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx &= \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!x^2} + \frac{1}{3!x^3} + \frac{1}{4!x^4} + \cdots \right) dx \\
 &= 2 + \ln 2 + \frac{1}{2! \cdot 4} + \frac{3}{3! \cdot 32} + \frac{7}{4! \cdot 192} + \cdots \\
 &= 2 + 0.6931 + 0.1250 + 0.0156 + 0.0015 + \cdots \\
 &\doteq 2.8352,
 \end{aligned}$$

于是 $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx \approx 2.835$,

准确到 0.001.

$$\begin{aligned}
 (3) \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^2 \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right) dx \\
 &= 2 - \frac{2^3}{2 \cdot 3!} + \frac{2^5}{5 \cdot 5!} - \frac{2^7}{7 \cdot 7!} + \cdots,
 \end{aligned}$$

写出的项的计算其值如

$$2 = 2.0000 \qquad \frac{2^3}{3 \cdot 3!} = 0.4444 \quad (+)$$

$$\begin{array}{r}
 +) \frac{2^5}{5 \cdot 5!} = 0.0533 \quad (+) \\
 \hline
 2.0533 \\
 -) 0.4480 \\
 \hline
 1.6053
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 +) \frac{2^7}{7 \cdot 7!} = 0.0036 \quad (+) \\
 \hline
 0.4480
 \end{array}$$

于是 $1.6051 < \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx < 1.6054$,

这是因为级数中省略的项的误差

$$0 < R < \frac{2^9}{9 \cdot 9!} < \frac{1}{10^3}.$$

从而 $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1.605$.

$$\begin{aligned}
 (4) \int_0^1 \cos x^2 dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots \right) dx \\
 &= 1 - \frac{1}{5 \cdot 2!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \cdots,
 \end{aligned}$$

计算取出的各项值如下

$$\begin{array}{r}
 1 = 1.0000 \\
 \frac{1}{5 \cdot 2!} = 0.1000 \\
 +) \frac{1}{9 \cdot 4!} = 0.0046 \quad (+) \\
 \hline
 1.0046 \\
 -) 0.1000 \\
 \hline
 0.9046
 \end{array}$$

这里级数省略项误差

$$0 < R < \frac{1}{13 \cdot 6!} < \frac{1}{10^3},$$

于是 $\int_0^1 \cos x^2 dx \approx 0.9046$,

从而 $\int_0^1 \cos x^2 dx \approx 0.905$.

准确到 0.001.

$$\begin{aligned}
 (5) \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \right) dx \\
 &= 1 + \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} + \cdots,
 \end{aligned}$$

省略各项的值

$$\begin{aligned} R &< \frac{1}{7 \cdot 7!} \left(1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{7 \cdot 7!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^2}} < 10^{-3}, \end{aligned}$$

写出的各项值计算如下

$$\begin{array}{r} 1 = 1.0000 \\ \frac{1}{3 \cdot 3!} = 0.0556 \quad (-) \\ +) \frac{1}{5 \cdot 5!} = 0.0017 \quad (+) \\ \hline 1.0573 \end{array}$$

于是 $\int_0^1 \frac{\sinh x}{x} dx \approx 1.057$, 准确到 0.001.

(6) 当 $n \geq 2$ 时

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^3} &= \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3} \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x}\right)^{3n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } I &\triangleq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 - \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \cdots, \end{aligned}$$

取前两项的近似值, 有

$$I = 0.119 + \theta, (0 < \theta < 0.001).$$

若直接积分, 有

$$\begin{aligned}
& \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \\
&= \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) dx \\
&= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Big|_2^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6} \ln 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6} \ln 3 \approx 0.119.
\end{aligned}$$

准确到 0.001.

(7) 由

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{4 \cdot x^4}{3^2 \cdot 2!} + \dots,$$

有 $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^5} + \dots \doteq 0.337.$

准确到 0.001.

$$\begin{aligned}
(8) \quad & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \\
&= \int_0^1 (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} dx \\
&= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^8 + \dots \right) dx \\
&= 1 - \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{9 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdots 45}{93 \cdot 2^{23} \cdot 23!} + \dots \\
&= (1.0000 + 0.0417 + 0.0160 + 0.0090 + 0.0060 \\
&\quad + 0.0043 + 0.0033 + 0.0026 + 0.0022 + 0.0018 \\
&\quad + 0.0014 + 0.0012) - (0.1000 + 0.0240 \\
&\quad + 0.0117 + 0.0072 + 0.0050 + 0.0037 + 0.0029 \\
&\quad + 0.0024 + 0.0020 + 0.0016 + 0.0013 + 0.0010) + \dots \\
&\approx 0.927.
\end{aligned}$$

(9) 当 $x \in [10, 100]$, 有

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{x}\right)^n,\end{aligned}$$

于是, 有 $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

$$\begin{aligned}&= \int_{10}^{100} \frac{\ln x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_{10}^{100} x^{-n-1} dx \\&= \frac{3}{2} \ln^2 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \frac{1}{10^n} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \\&= \frac{3}{2} \ln^2 10 + \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{4 \cdot 10^2} \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) \\&\quad + \frac{1}{9 \cdot 10^3} \left(1 - \frac{1}{10^3}\right) + \dots \\&\approx 8.040,\end{aligned}$$

准确到 0.001.

$$\begin{aligned}(10) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\right) dx \\&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2 \cdot 2^3} + \frac{1}{5^2 \cdot 2^5} - \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} + \dots,\end{aligned}$$

于是 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx \approx 0.487.$

准确到 0.001.

$$\begin{aligned}(11) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots\right) dx \\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4 \cdot 3^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 2^5} + \dots,\end{aligned}$$

省略项的和值

$$R < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7^2} \cdot \frac{1}{2^7} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots\right)$$

$$< \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} < \frac{1}{10^3},$$

于是 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx \approx 0.507.$

(12) 由

$$x^x = e^{x \ln x} = 1 + x \ln x + \frac{(x \ln x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x \ln x)^n}{n!} + \cdots,$$

又由 2286 题知

$$\int_0^1 x^n \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}},$$

于是 $\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \cdots,$

若取前四项, 则误差为

$$R < \frac{4!}{4!(4+1)^{4+1}} = \frac{1}{5^5} < \frac{1}{10^3}.$$

故 $\int_0^1 x^x dx \approx 0.783.$

准确到 0.001.

【2933】 求出正弦曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 的一个半波的弧长, 精确到 0.01.

解 弧

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{1}{2! \cdot 2^2} \cos^4 x + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \cos^6 x - \cdots \right) dx. \end{aligned}$$

又由 2290 题结论知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1} \cdot n! \cdot n!},$$

有 $S = 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \cdot 2!}{2^4} - \frac{1}{2! \cdot 2^2} \cdot \frac{\pi \cdot 4!}{2^5 \cdot 2! \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \cdot \frac{\pi \cdot 6!}{2^7 \cdot 3! \cdot 3!} - \cdots \right)$

$$= \pi \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{64} + \frac{5}{256} - \cdots \right),$$

若以写出的各项值为 S 值, 则误差 R 满足

$$0 < R < \frac{3 \cdot 5 \cdot 2\pi}{4!2^4} \cdot \frac{8!}{2^9 \cdot 4!4!} < \frac{1}{10^2},$$

于是 $S \approx 3.14(1 + 0.25 - 0.05 + 0.02) \approx 3.83$.

【2934】 椭圆半轴分别为 $a = 1$ 和 $b = \frac{1}{2}$, 求椭圆的弧长, 精确到 0.01.

解 由椭圆的参数方程

$$x = a \sin t, \quad y = b \cos t,$$

于是 $ds = \sqrt{x_t^2 + y_t^2} dt = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$
 $= a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt,$

其中 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率. 故有

$$\begin{aligned} S &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 t - \frac{1}{2!2^2} e^4 \sin^4 t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} e^6 \sin^6 t - \cdots \right) dt \\ &= 4a \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} e^2 \cdot \frac{\pi \cdot 2!}{2^3} - \frac{1}{2!2^2} e^4 \cdot \frac{\pi \cdot 4!}{2^5 \cdot 2! \cdot 2!} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3}{3!2^3} e^6 \cdot \frac{\pi \cdot 6!}{2^7 \cdot 3!3!} - \cdots \right). \end{aligned}$$

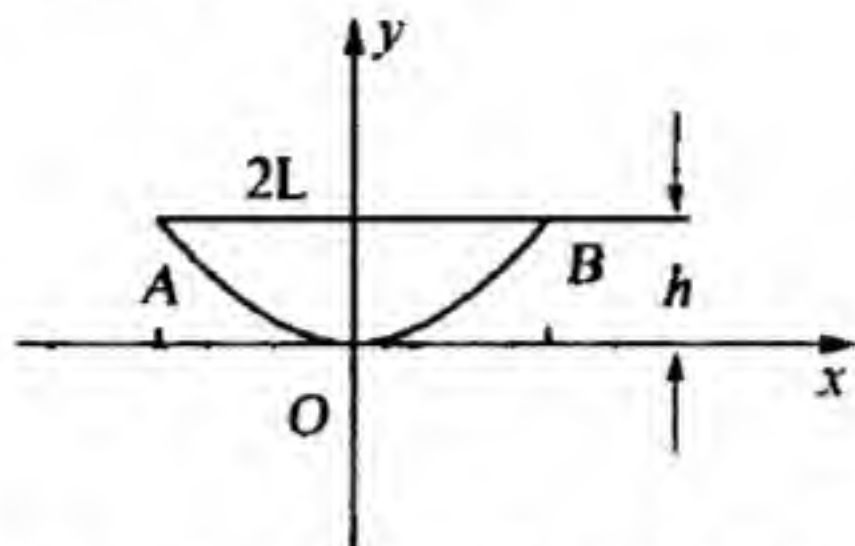
若以前五项作为 S 的近似值, 则其误差 $0 < R < 10^{-2}$, 代入 a, b 值

$$\begin{aligned} \text{有 } S &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{64} \cdot \frac{9}{16} - \frac{5}{256} \cdot \frac{27}{64} - \frac{5 \cdot 27 \cdot 3}{256 \cdot 64 \cdot 4} - \cdots \right) \\ &\approx 2\pi(1 - 0.188 - 0.026 - 0.008 - 0.003 - \cdots) \\ &\approx 4.84. \end{aligned}$$

【2935】 电线悬挂在两根桩上, 两根桩之间的距离为 $2l = 20\text{m}$, 电线具有抛物线形状. 若凹处的矢 $h = 40\text{cm}$, 计算电线的长

度,精确到 1cm.

解 建立坐标系如下



于是, $A(-10, 0.4)$, $B(10, 0.4)$, 则抛物线 AOB 的方程可设为 $x^2 = 2py$, 从而

$$10^2 = 2p \times 0.4,$$

有 $p = 125$.

所以方程为 $y = \frac{1}{250}x^2$.

故所求的电线长为

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{125}x\right)^2} dx \\ &= 250 \int_0^{\frac{2}{25}} \sqrt{1 + t^2} dt = 250 \int_0^{\frac{2}{25}} (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 250 \int_0^{\frac{2}{25}} \left(1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2! \cdot 2^2}t^4 + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3}t^6 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4! \cdot 2^4}t^8 + \cdots\right) dt \\ &= 250 \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{25^3} - \frac{1}{5 \cdot 2! \cdot 2^2} \cdot \frac{2^5}{25^5} + \cdots \right), \end{aligned}$$

今取级数的前两项作为 S 的近似值, 则其误差

$$0 < R < \frac{250}{5 \cdot 2! \cdot 2^2} \cdot \frac{2^5}{25^5} < 10^{-2}.$$

因此 $S \approx 250 \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{25^3} \right) \approx 20.02$.

于是所求的电线长为 20.02 米, 准确到 0.01 米.

§ 6. 傅里叶级数

1. 展开定理 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-l, l)$ 为逐段连续并且具有逐段连续导数 $f'(x)$, 而且它的断点 ξ 是正则的 (亦即 $f(\xi) = \frac{1}{2}[f(\xi-0) + f(\xi+0)]$), 则函数 $f(x)$ 在这个区间可以用傅里叶级数表示:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (1)$$

其中 $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$

和 $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)'$

特别是:

(1) 若函数 $f(x)$ 是偶函数, 则具有:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (3)$$

其中 $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$

(2) 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 则得出:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (4)$$

其中 $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots).$

在 $(0, l)$ 区间有定义并拥有上面所提到的连续性质的函数 $f(x)$, 在这个区间可以用公式(3) 以及公式(4) 表示.

2. 完备性条件 对任一在区间 $[-l, l]$ 上可积且其平方也是可积的函数 $f(x)$, 作具系数(2)、(2') 的级数(1), 则李雅普诺夫等式成立:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx.$$

3. 傅里叶级数的积分 在区间 $(-l, l)$ 按黎曼意义可积分的

函数 $f(x)$ 的傅里叶级数(1)(即使是发散级数),都可在这个区间以逐项积分.

【2936】 把函数 $f(x) = \sin^4 x$ 展开成傅里叶级数.

解 在 $[-\pi, \pi]$ 上, 设 $f(x) = \sin^4 x$ 展成的傅里叶级数为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \sin^4 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{有 } a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{8} \cos nx - \frac{1}{2} \cos 2x \cos nx + \frac{1}{8} \cos 4x \cos nx \right) dx \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq 2, n \neq 4, \\ -\frac{1}{2}, & n = 2, \\ -\frac{1}{8}, & n = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \sin nx \, dx = 0, (n = 1, 2, \dots).$$

又 $f(x)$ 为连续函数, 故 Fourier 级数收敛于函数本身, 即

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x.$$

【2937】 三角多项式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix).$$

的傅里叶级数是什么样的?

解 $P_n(x)$ 是以 2π 为周期的函数,于是我们只考虑在 $[-\pi, \pi]$ 上展成的傅里叶级数.

由

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix) dx \\ &= 2\alpha_0, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix) \cos nx dx \\ &= \alpha_n, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix) \sin nx dx \\ &= \beta_n, \end{aligned}$$

于是,在 $[-\pi, \pi]$ 上,我们有

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix). \end{aligned}$$

【2938】 把函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi).$$

展开成傅里叶级数,作出函数图形及其傅里叶级数的若干部分和的图形.

利用展开式,求解莱布尼茨级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

解 由

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x dx = 0,$$

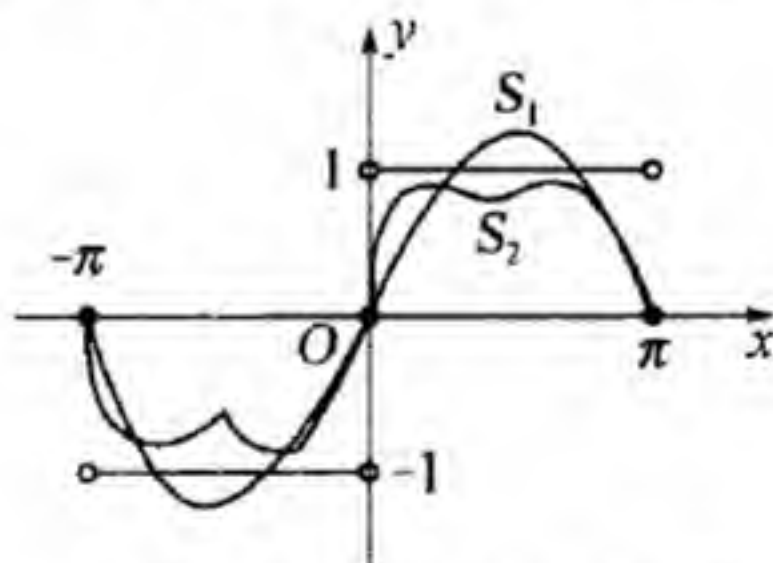
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \cos nx dx = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n], \end{aligned}$$

而 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上只有一个第一类间断点, 于是其傅里叶级数收敛. 且

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$f(x)$ 及其傅里叶级数的若干部分和的图形如下图形.



这里 $f(x) = \operatorname{sgn} x$, S_1 = 级数第一项, S_2 = 级数前两项之和.

现令 $x = \frac{\pi}{2}$, 有

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1,$$

于是莱布尼兹级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

在指定区间把下列函数展开成傅里叶级数(2939 ~ 2951).

$$\text{【2939】 } f(x) = \begin{cases} A, & \text{若 } 0 < x < l; \\ 0, & \text{若 } l < x < 2l. \end{cases}$$

其中 A 为常数, 在区间 $(0, 2l)$.

解 由

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l A dx = A,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^l A \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_0^l A \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{A}{n\pi} [1 - (-1)^n].$$

由展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\begin{aligned} & \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi x}{l} \\ &= \begin{cases} A, & 0 < x < l, \\ \frac{A}{2}, & x = l, \\ 0, & l < x < 2l. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{【2940】 } f(x) = x, \text{ 在区间 } (-\pi, \pi).$$

解 由 $f(x) = x$ 知 $f(x)$ 为奇函数, 有

$$a_0 = a_n = 0,$$

$$\text{且 } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{2}{n},$$

由展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} = x, x \in (-\pi, \pi).$$

$$\text{【2941】 } f(x) = \frac{\pi-x}{2}, \text{ 在区间 } (0, 2\pi).$$

解 由

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \cos nx \, dx \\ &= \frac{\pi-x}{2n\pi} \sin nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nx \, dx \\ &= -\frac{\pi-x}{2n\pi} \cos nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

于是由展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi-x}{2}, x \in (0, 2\pi).$$

【2942】 $f(x) = |x|$, 在区间 $(-\pi, \pi)$.

解 因为 $f(x) = |x|$ 为偶函数, 于是 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{n\pi} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

于是由展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = |x|, x \in (-\pi, \pi).$$

【2943】 $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{若 } -\pi < x < 0; \\ bx, & \text{若 } 0 < x < \pi, \end{cases}$

其中 a 与 b 为常数, 在区间 $(-\pi, \pi)$.

解 由

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx \, dx = \frac{b-a}{2} \pi,$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx \cos nx \, dx \\
 &= \frac{a-b}{n^2 \pi} [1 - (-1)^n], \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx \sin nx \, dx \\
 &= \frac{a+b}{n} (-1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

于是由展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\begin{aligned}
 &\frac{b-a}{4} \pi + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \\
 &+ (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \\
 &= \begin{cases} ax, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ bx, & 0 < x < \pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

【2944】 $f(x) = \pi^2 - x^2$, 在区间 $(-\pi, \pi)$.

解 因为 $f(x) = \pi^2 - x^2$ 为偶函数, 于是 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\pi^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{4\pi^2}{3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos nx \, dx \\
 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \\
 &= -\frac{2}{n\pi} x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \\
 &= -\frac{4}{n^2 \pi} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n^2 \pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \\
 &= \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

于是由展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx \\ &= \pi^2 - x^2, x \in (-\pi, \pi). \end{aligned}$$

【2945】 $f(x) = \cos ax$, 在区间 $(-\pi, \pi)$ (a 为非整数).

解 因为 $f(x) = \cos ax$ 为偶函数, 于是 $b_n = 0$, 又

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \, dx = \frac{2}{a\pi} \sin a\pi, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(n+a)x + \cos(n-a)x] \, dx \\ &= \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} a}{n^2 - a^2}, \end{aligned}$$

从而由展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2 \sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a \cos nx}{n^2 - a^2} \right] = \cos ax, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

【2946】 $f(x) = \sin ax$, 在区间 $(-\pi, \pi)$ (a 为非整数).

解 因为 $f(x) = \sin ax$ 为奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 又

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(n-a)x - \cos(n+a)x] \, dx \\ &= \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 - a^2}, \end{aligned}$$

从而由展开定理有

$$\frac{2 \sin a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 - a^2} = \sin ax, x \in (-\pi, \pi).$$

【2947】 $f(x) = \operatorname{sh} ax$, 在区间 $(-\pi, \pi)$.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 于是 $a_0 = a_n = 0$, 又

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \operatorname{sh} ax \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{a}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \operatorname{ch} ax \, dx \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sh} a\pi + \frac{a}{n^2} \operatorname{ch} ax \sin nx \Big|_0^{\pi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a^2}{n^2} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx \, dx \right] \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sh} a\pi - \frac{a^2}{n^2} b_n,
\end{aligned}$$

故
$$b_n = \frac{(-1)^{n+1} 2n}{(n^2 + a^2)\pi} \operatorname{sh} a\pi,$$

从而由展开定理有

$$\frac{2\operatorname{sh} a\pi}{n} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{n^2 + a^2} = \operatorname{sh} ax, x \in (-\pi, \pi).$$

【2948】 $f(x) = e^{ax}$, 在区间 $(-h, h)$.

解 由

$$a_0 = \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} \, dx = \frac{1}{ah} (e^{ah} - e^{-ah}) = \frac{2}{ah} \operatorname{sh} ah,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} \cos \frac{n\pi x}{h} \, dx \\
&= \frac{1}{h} \frac{a \cos \frac{n\pi x}{h} + \frac{n\pi}{h} \sin \frac{n\pi x}{h}}{a^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} e^{ax} \Big|_{-h}^h
\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n 2ah}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \operatorname{sh} ah,$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} \sin \frac{n\pi x}{h} \, dx \\
&= \frac{1}{h} \frac{a \sin \frac{n\pi x}{h} - \frac{n\pi}{h} \cos \frac{n\pi x}{h}}{a^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} e^{ax} \Big|_{-h}^h
\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} 2n\pi}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \operatorname{sh} ah,$$

于是由展开定理有

$$2\operatorname{sh}ah \left[\frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos \frac{n\pi x}{h} - n\pi \sin \frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \right] = e^{ax},$$

$$x \in (-h, h).$$

【2949】 $f(x) = x$, 在区间 $(a, a+2l)$.

解 因为

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x dx = 2(a+l),$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{1}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_a^{a+2l} - \frac{1}{n\pi} \int_a^{a+2l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2l}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_a^{a+2l} + \frac{1}{n\pi} \int_a^{a+2l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= -\frac{2l}{n\pi} \cos \frac{n\pi a}{l}, \end{aligned}$$

于是由展开定理,有

$$\begin{aligned} a+l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \right. \\ \left. - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = x, x \in (a, a+2l). \end{aligned}$$

【2950】 $f(x) = x \sin x$, 在区间 $(-\pi, \pi)$.

解 由于 $f(x) = x \sin x$ 为偶函数, 于是 $b_n = 0$, 又

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) = 2, \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{x \cos(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2} \right] \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}, n=2,3,\dots, \\
a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin 2x dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right] \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

从而由展开定理有

$$1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} \cos nx = x \sin x,$$

$$x \in (-\pi, \pi).$$

【2951】 $f(x) = x \cos x$, 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 于是 $a_0 = a_n = 0$, 又

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin 2nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x [\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x] dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{x \cos(2n-1)x}{2n-1} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{(-1)^{n+1} 16}{\pi} \cdot \frac{n}{(4n^2-1)^2},
\end{aligned}$$

从而由展开定理有

$$\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2-1)^2} \sin 2nx = x \cos x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

把下列周期函数展开成傅里叶级数(2952 ~ 2959).

【2952】 $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

解 由

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \operatorname{sgn}[\cos(x+2\pi)] \\ &= \operatorname{sgn}(\cos x) = f(x), \end{aligned}$$

知, $f(x)$ 以 2π 为周期的周期函数, 又 $f(x)$ 为偶函数, 于是 $b_n = 0$,

$$\begin{aligned} \text{又 } a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sgn}(\cos x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-1) dx \right) = 0, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sgn}(\cos x) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos nx dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \right) = \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ (-1)^k \frac{4}{(2k+1)\pi}, & n = 2k+1, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

从而由展开定理, $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上可展开为

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} \right] = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

又上式在 $f(x)$ 的不连续点 $x = -\frac{\pi}{2}$ 和 $x = \frac{\pi}{2}$ 也成立, 事实上, 在这些点满足

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)],$$

于是, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 上述展式皆成立.

【2953】 $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

解 易知 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数, 且 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内为一奇函数, 于是 $a_0 = a_n = 0$, 又

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\sin x) \sin nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin nx \, dx \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{n} \cos nx \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{x}{n} \cos nx - \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right] \\
&= \frac{4}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} \\
&= \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ (-1)^k \frac{4}{\pi(2k+1)^2}, & n = 2k+1, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

从而由展开定理有

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)x = \arcsin(\sin x),$$

$x \in (-\infty, +\infty).$

【2954】 $f(x) = \arcsin(\cos x).$

解 由 $f(x)$ 为偶函数知 $b_n = 0$, 又 $f(x)$ 以 2π 为周期的连续函数, 于是

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\cos x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \, dx = 0, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\cos x) \cos nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2n} \sin nx - \frac{x}{n} \sin nx - \frac{1}{n^2} \cos nx \right] \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} [1 - (-1)^n] \\
&= \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{4}{(2k+1)^2 \pi}, & n = 2k+1, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

从而由展开定理有

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = \arcsin(\cos x), x \in (-\infty, +\infty).$$

【2955】 $f(x) = x - [x]$.

解 因为

$$\begin{aligned} f(x+1) &= x+1 - [x+1] = x+1 - [x] - 1 \\ &= x - [x] = f(x), \end{aligned}$$

于是 $f(x)$ 以 1 为周期. 且除 $x = k$ (k 为整数) 外, $f(x)$ 皆连续.

$$\text{由 } a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \{x - [x]\} dx = 2 \int_0^1 x dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \{x - [x]\} \cos 2n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \cos 2n\pi x dx$$

$$= 2 \left[\frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \cos 2n\pi x \right] \Big|_0^1 = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \{x - [x]\} \sin 2n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \sin 2n\pi x dx$$

$$= 2 \left[-\frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \sin 2n\pi x \right] \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{n\pi},$$

于是按展开定理有

$$\begin{aligned} x - [x] &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}, \\ &\quad x \neq k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

【2956】 $f(x) = (x)$, 其中 (x) 为 x 到与它最近的整数的距离.

解 $f(x)$ 是以 1 为周期的连续函数, 由

$$a_0 = 2 \int_0^1 (x) dx = 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) dx \right] = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= 2 \int_0^1 (x) \cos 2n\pi x dx \\
 &= 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x \cos 2n\pi x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \cos 2n\pi x dx \right] \\
 &= 2 \left\{ \left[\frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \cos 2n\pi x \right] \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{2n\pi} \sin 2n\pi x - \frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{4(n\pi)^2} \cos 2n\pi x \right] \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right\} \\
 &= \frac{1}{(n\pi)^2} [(-1)^n - 1] \\
 &= \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ -\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2}, & n = 2k+1 (k=0,1,2,\dots). \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x \sin 2n\pi x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \sin 2n\pi x dx \right] \\
 &= 2 \left\{ \left[-\frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \sin 2n\pi x \right] \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + \left[-\frac{1}{2n\pi} \cos 2n\pi x + \frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{4(n\pi)^2} \sin 2n\pi x \right] \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right\} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

从而由展开定理有

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2k+1)x}{(2k+1)^2} = (x), x \in (-\infty, +\infty).$$

【2957】 $f(x) = |\sin x|$.

解 $f(x)$ 以 π 为周期的连续函数, 且 $f(x)$ 为偶函数, 于是 $b_n = 0$, 又

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \cos 2nx \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x] \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{2n+1} \cos(2n+1)x + \frac{1}{2n-1} \cos(2n-1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4n^2-1},
 \end{aligned}$$

从而由展开定理有

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} = |\sin x|, x \in (-\infty, +\infty).$$

【2958】 $f(x) = |\cos x|$.

解 由 $f(x) = |\cos x| = \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right|$

知, 依据 2957 题有

$$\begin{aligned}
 |\cos x| &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{4n^2-1} \\
 &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2-1} \\
 &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}, \\
 &\quad x \in (-\infty, +\infty).
 \end{aligned}$$

【2959】 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \quad (|\alpha| < 1).$

解 当 $x = k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{n \cos nx}{\cos x} = n(-1)^{(n-1)k},$$

对于函数 $p_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$,

当 $x = k\pi$, 其值定义为极限值, 于是 $p_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $p_n(x)$ 以 2π 为周期的函数, 并且为偶函数. 又

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= \frac{\sin nx}{\sin x} \\
 &= \frac{\sin(n-1)x \cos x + \cos(n-1)x \sin x}{\sin x} \\
 &= p_{n-1}(x) \cos x + \cos(n-1)x,
 \end{aligned}$$

有 $|p_n(x)| \leq |p_{n-1}(x)| + 1,$
 $x \in (-\infty, +\infty), n = 2, 3, \dots$

又 $p_1(x) = 1$, 于是利用归纳法知

$$|p_n(x)| \leq n, x \in (-\infty, +\infty), n = 1, 2, \dots$$

从而 $\left| \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \right| \leq n |\alpha|^n, x \in (-\infty, +\infty), n = 1, 2, \dots$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha|^n$ 收敛 (因为 $|\alpha| < 1$), 于是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \left| \frac{\sin nx}{\sin x} \right| \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上一致收敛. 从而 } f(x) =$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 且在任何有限区间上皆可逐项积分.

由 $f(x)$ 以 2π 为周期, 且为偶函数, 有 $b_n = 0$, 又

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\sum_{n=2,4,\dots} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx + \sum_{n=1,3,\dots} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \right] \\
 &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k+1} = \frac{2\alpha}{1-\alpha}, (2291 \text{ 题结论})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m \int_0^{\pi} \frac{\sin mx \cos nx}{\sin x} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx \\
 &= I_1 + I_2,
 \end{aligned}$$

其中 $I_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{m \leq n} \alpha^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx,$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{m>n} a^m \int_0^\pi \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx.$$

当 $m \leq n$ 时, I_1 中各积分皆为零, 于是 $I_1 = 0$; 当 $m > n$ 时, 若 $m+n, m-n$ 为偶数, 则 I_2 中的对应的积分为零, 若 $m+n, m-n$ 为奇数, 则 I_2 中对应的积分等于 2π . 于是

$$I_2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{(2k+1)+n} = 2 \frac{a^{n+1}}{1-a^2}, a_n = I_2.$$

从而由展开定理, $f(x)$ 的展开式为

$$f(x) = \frac{a}{1-a^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx \right), x \in (-\infty, +\infty).$$

【2960】 把以下函数展开成傅里叶级数:

$$f(x) = \sec x \quad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \right).$$

解 $f(x) = \sec x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$ 内连续, 且是偶函数, 于是 $b_n = 0$. 又

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{1 - \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}), \end{aligned}$$

又 $\cos 4nx - \cos(4nx - 4x)$

$$\begin{aligned}
 &= -2\sin(4nx - 2x)\sin 2x \\
 &= -4\sin(4nx - 2x)\sin x \cos x \\
 &= 2[\cos(4nx - x) - \cos(4nx - 3x)]\cos x,
 \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4nx}{\cos x} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \\
 &= \frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos(4n-1)x - \cos(4n-3)x] dx \\
 &\quad + \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4(n-1)x}{\cos x} dx \\
 &= \frac{16}{\pi} \left[\frac{1}{4n-1} \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4n-3} \sin\left(n\pi - \frac{3}{4}\pi\right) \right] + a_{n-1} \\
 &= \frac{16}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{4n-1} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{(-1)^{n-1}}{4n-3} \sin \frac{3\pi}{4} \right] + a_{n-1} \\
 &= \frac{16}{\pi} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1} \right) + a_{n-1} \\
 &= \frac{16}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{(4n-3)(4n-1)} + a_{n-1},
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)} + a_0 \\
 &= \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)} \\
 &\quad + \frac{8}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}), n = 1, 2, \dots.
 \end{aligned}$$

从而有如下展式

$$\begin{aligned}
 \sec x &= \frac{4}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{(4k-3)(4k-1)} \right] \cos 4nx, \\
 &\qquad\qquad\qquad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).
 \end{aligned}$$

【2961】 把函数 $f(x) = x^2$ 展开成傅里叶级数:

(1) 在区间 $(-\pi, \pi)$ 按余弦展开;

(2) 在区间 $(0, \pi)$ 按正弦展开;

(3) 在区间 $(0, 2\pi)$ 展开.

作出函数图形及(1)、(2)和(3)中傅里叶级数的和的图形.

利用这些展开式求下列级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

解 (1) 由 $f(x)$ 为偶函数知 $b_n = 0$, 又

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

于是 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上按余弦展开为

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = x^2, x \in [-\pi, \pi].$$

(2) 由于 $a_0 = a_n = 0$, 又

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx + \frac{2}{n^2} x \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3 \pi} [(-1)^n - 1], \end{aligned}$$

有 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上按正弦展开是

$$\begin{aligned} &2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} \\ &= x^2, x \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

(3) 由

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n},$$

有 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上的展式是

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = x^2, x \in (0, 2\pi).$$

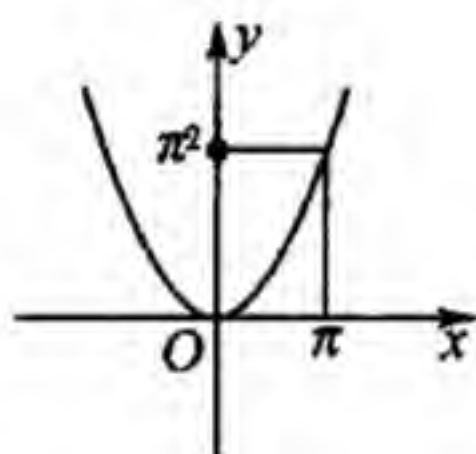


图 1

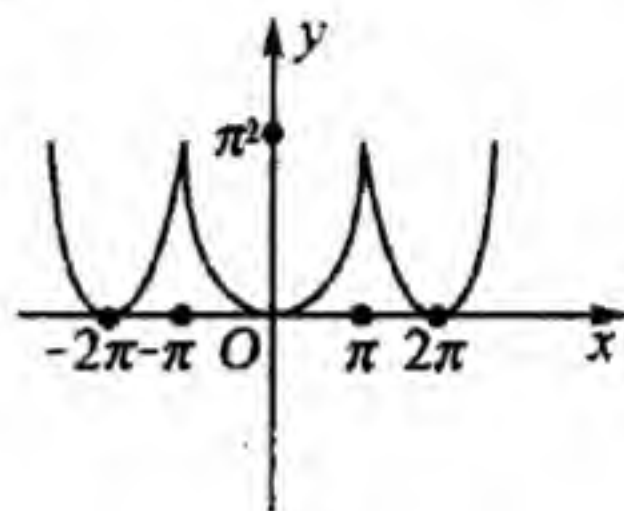


图 2

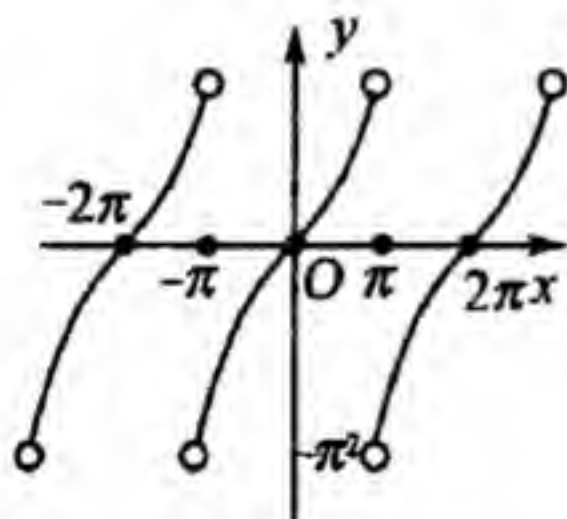


图 3

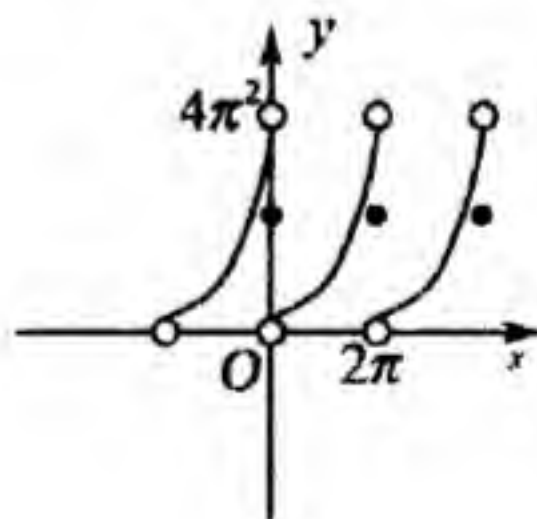


图 4

现在展式 ① 中令 $x = \pi$, 有

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot (-1)^n = \pi^2.$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

①

若在展式 ② 中令 $x = \pi$, 则

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \pi^2,$$

于是
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad (2)$$

将级数 ① + ②, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right] = \frac{\pi^2}{4},$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (3)$$

【2962】 根据展开式:

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi).$$

用逐项积分法求函数 x^2, x^3 和 x^4 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数.

解 对等式两边在 $[0, x]$ 上积分有

$$\frac{x^2}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - 1}{n^2},$$

又
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

于是我们有

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, x \in (-\pi, \pi). \quad (1)$$

将 ① 式在 $[0, x]$ 上逐项积分, 又

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx,$$

我们有
$$x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3},$$

$x \in (-\pi, \pi), \quad (2)$

于是
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2 x - x^3}{12}, x \in [-\pi, \pi].$$

将上式从 0 到 x 积分有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - 1}{n^4} = \frac{2\pi^2 x^2 - x^4}{48}, x \in [-\pi, \pi].$$

令 $x = \pi$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} = \frac{\pi^4}{48}.$$

于是有
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \quad (3)$$

又级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (4)$$

收敛, 设其和为 S , 由 (3) - (4) 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = S - \frac{\pi^4}{96},$$

即
$$\frac{S}{16} = S - \frac{\pi^4}{96}.$$

从而
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

将 (2) 式从 $-\pi$ 到 x 积, 且以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

代入有
$$\begin{aligned} \frac{x^4}{4} - \frac{\pi^4}{4} &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} - 2\pi^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \\ &\quad + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^4} + 12 \cdot \frac{\pi^4}{90}. \end{aligned}$$

也就是
$$\begin{aligned} x^4 &= \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \\ &\quad + 48 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^4}, \quad x \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

【2963】 写出函数

$$f(x) \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| < \alpha \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } \alpha < |x| < \pi \text{ 时} \end{cases} \text{ 的李雅普诺夫等式.}$$

根据李雅普诺夫等式求下列级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

解 因为 $f(x)$ 为偶函数, 于是 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} dx = \frac{2\alpha}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \cos nx dx = \frac{2 \sin n\alpha}{n\pi},$$

又 $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} dx = \frac{2\alpha}{\pi}.$

从而 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开的李雅普诺夫等式为

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2\alpha}{\pi}. \end{aligned}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$

由 2961 题知

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}. \end{aligned}$$

【2964】 把下列函数展开成傅里叶级数:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{若 } 1 < x < 2; \\ 3-x, & \text{若 } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

解 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上按周期为 3 作傅里叶展开, 于是 $f(x)$ 的延拓(周期为 3)是偶函数, 从而 $b_n = 0$, 又

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\frac{3}{2}} \int_0^3 f(x) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 x dx + \frac{2}{3} \int_1^2 dx + \frac{2}{3} \int_2^3 (3-x) dx = \frac{4}{3}, \\ a_n &= \frac{2}{3} \int_0^1 x \cos \frac{2n\pi x}{3} dx + \frac{2}{3} \int_1^2 \cos \frac{2n\pi x}{3} dx \\ &\quad + \frac{2}{3} \int_2^3 (3-x) \cos \frac{2n\pi x}{3} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \left\{ \left[\frac{3}{2n\pi} x \sin \frac{2n\pi x}{3} + \frac{9}{4n^2\pi^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} \right] \Big|_0^1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{3} \Big|_1^2 + \left[\frac{9}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{3}{2n\pi} x \sin \frac{2n\pi x}{3} - \frac{9}{4n^2\pi^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} \right] \Big|_2^3 \right\} \\
&= \frac{2}{3} \left[-\frac{9}{2(n\pi)^2} + \frac{9}{4(n\pi)^2} \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + \cos \frac{4n\pi}{3} \right) \right] \\
&= -\frac{3}{(n\pi)^2} + \frac{3}{(n\pi)^2} (-1)^n \cos \frac{n\pi}{3},
\end{aligned}$$

于是由展开定理, $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 可按余弦展开为

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{3} \right] \cos \frac{2n\pi x}{3} = f(x).$$

又

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{3} \right] \cos \frac{2n\pi x}{3} \\
&= \left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{1^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{2\pi x}{3} + \left(-\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{4\pi x}{3} \\
&\quad + \left(-\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) \cos 2\pi x + \left(-\frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{8\pi x}{3} \\
&\quad + \left(-\frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{10\pi x}{3} \\
&\quad + \left(-\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} \right) \cos 4\pi x + \dots \\
&= -\frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x,
\end{aligned}$$

因而 $f(x)$ 的余弦展开式为

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x,$$

$x \in [0, 3].$

利用以下公式:

$$\cos x = \frac{1}{2}(t + \bar{t}), \sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t}).$$

其中 $t = e^{ix}$ 与 $\bar{t} = e^{-ix}$, 得出以下函数傅里叶级数的展开式(2965 ~ 2969).

【2965】 $\cos^{2m} x$, (m 为正整数).

解 $\cos^{2m} x$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2m} = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{l=0}^{2m} C_{2m}^l e^{(2m-l)ix} e^{-lix} \\
 &= \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m}} \left(\sum_{l=0}^{m-1} + \sum_{l=m+1}^{2m} \right) C_{2m}^l e^{2(m-l)ix} \\
 &= \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m}} \left[\sum_{l=0}^{m-1} C_{2m}^l e^{2(m-l)ix} + \sum_{l=0}^{m-1} C_{2m}^{2m-l} e^{-2(m-l)ix} \right] \\
 &= \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m}} \sum_{s=0}^{m-1} C_{2m}^s [e^{2(m-s)ix} + e^{-2(m-s)ix}] \\
 &= \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{s=0}^{m-1} C_{2m}^s \cos 2(m-s)x \\
 &= \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=1}^m C_{2m}^{m-k} \cos 2kx,
 \end{aligned}$$

因为上述表达式为一三角多项式, 于是在 $(-\infty, +\infty)$ 上的傅里叶展开式即为本身.

【2966】 $\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (|q| < 1).$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} &= \frac{\frac{q}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})}{1 - q(e^{ix} + e^{-ix}) + q^2} \\
 &= \frac{1}{2i} \frac{q(e^{ix} - e^{-ix})}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} \\
 &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - qe^{ix}} - \frac{1}{1 - qe^{-ix}} \right) \\
 &= \frac{1}{2i} [(1 + qe^{ix} + q^2 e^{2ix} + \cdots) \\
 &\quad - (1 + qe^{-ix} + q^2 e^{-2ix} + \cdots)] \\
 &= q \sin x + q^2 \sin 2x + \cdots,
 \end{aligned}$$

而级数 $q \sin x + q^2 \sin 2x + \cdots + q^n \sin nx + \cdots$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上

致收敛. 事实上 $|q^n \sin nx| \leq q^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ($|q| < 1$) 收敛, 于是

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛. 于是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}, x \in (-\infty, +\infty).$$

即为傅里叶展开式.

【2967】 $\frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (|q| < 1).$

解
$$\begin{aligned} \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2} &= \frac{1 - q^2}{1 - q(e^{ix} + e^{-ix}) + q^2} \\ &= (1 - q^2) \frac{1}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} \\ &= -1 + \frac{1}{1 - qe^{ix}} + \frac{1}{1 - qe^{-ix}} \\ &= -1 + (1 + qe^{ix} + q^2 e^{2ix} + \cdots) \\ &\quad + (1 + qe^{-ix} + q^2 e^{-2ix} + \cdots) \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx, \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因而 $\frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2}$ 的傅里叶展开式为

$$\frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx.$$

【2968】 $\frac{1 - q \cos x}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (|q| < 1).$

解
$$\begin{aligned} \frac{1 - q \cos x}{1 - 2q \cos x + q^2} &= \frac{1 - \frac{q}{2}(e^{ix} + e^{-ix})}{1 - q(e^{ix} + e^{-ix}) + q^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - qe^{ix} - qe^{-ix}}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - qe^{ix}} + \frac{1}{1 - qe^{-ix}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [(1 + qe^{ix} + q^2 e^{2ix} + \cdots) \\
&\quad + (1 + qe^{-ix} + q^2 e^{-2ix} + \cdots)] \\
&= 1 + q\cos x + q^2 \cos 2x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx,
\end{aligned}$$

又上式右端级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 于是 $\frac{1 - q\cos x}{1 - 2q\cos x + q^2}$ 的傅里叶级数为

$$\frac{1 - q\cos x}{1 - 2q\cos x + q^2} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx, x \in (-\infty, +\infty).$$

【2969】 $\ln(1 - 2q\cos x + q^2)$ ($|q| < 1$).

解 因为

$$1 - 2q\cos x + q^2 \geq 1 - 2q + q^2 = (1 - q)^2 > 0,$$

于是 $\ln(1 - 2q\cos x + q^2)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 且是周期为 2π 的偶函数, 对该函数关于 x 求导, 且利用 2966 题结论有

$$\begin{aligned}
&[\ln(1 - 2q\cos x + q^2)]' \\
&= \frac{2q\sin x}{1 - 2q\cos x + q^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx, x \in (-\infty, +\infty).
\end{aligned}$$

对上式从 0 到 x 积分(因为上式级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 故可逐项积分), 则有

$$\begin{aligned}
&\ln(1 - 2q\cos x + q^2) \\
&= \int_0^x \frac{2q\sin t}{1 - 2q\cos t + q^2} dt + 2\ln(1 - q) \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x q^n \sin nt dx + 2\ln(1 - q) \\
&= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} + 2\ln(1 - q),
\end{aligned}$$

$$\text{又} \quad \ln(1 - q) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}.$$

$$\text{于是} \quad \ln(1 - 2q\cos x + q^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx,$$

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

因为上式右端级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 于是上式即是左端函数的傅里叶的级数.

把无界周期函数展开成傅里叶级数(2970 ~ 2972).

【2970】 $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$.

解 $f(x)$ 以 2π 为周期的周期函数, 当 $x = 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时函数有无穷个不连续点, 因为 $f(x)$ 是偶函数, 于是 $b_n = 0$, 又

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt \\ &= \frac{4}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right) \quad (2353 \text{ 题的结论}) \\ &= -2 \ln 2, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin nx \ln \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{2n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x + \sin(n - \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t} dt, \quad ① \end{aligned}$$

由 2291 题结论知

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \pi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

于是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \pi.$

令 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx,$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx,$$

$$\begin{aligned} \text{有} \quad I_2 & \stackrel{\substack{\text{令 } \pi-x=u \\ x=\pi-u}}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin(2n+1)(\pi-u)}{\sin(\pi-u)} du \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = I_1, \end{aligned}$$

$$\text{从而} \quad \frac{\pi}{2} = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx,$$

代入①式有

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad (n=1, 2, \dots).$$

由 $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上绝对可积:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx & = 2 \int_0^{\pi} \left| \ln \sin \frac{x}{2} \right| dx \\ & = -2 \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx = 2\pi \ln 2 < +\infty. \end{aligned}$$

又除去 $x = 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 诸点外, 在其他点 $f(x)$ 皆可微, 根据傅里叶级数的李普希兹判别法知, 除上述各点外, $f(x)$ 的傅里叶级数收敛于 $f(x)$ 本身, 即

$$\ln \left| \frac{\sin x}{2} \right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n},$$

$$x \neq 2k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

$$\text{【2971】} \quad f(x) = \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|.$$

解 由 2970 题结论有

$$\begin{aligned} \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| & = \ln \left| \sin \frac{\pi-x}{2} \right| \\ & = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\pi-x)}{n} \\ & = -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos nx, \end{aligned}$$

$$x \neq (2m+1)\pi, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

$$\text{【2972】} \quad f(x) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|.$$

解 由 2970 和 2971 题结论知

$$\begin{aligned}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| &= \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| \\ &= \left[-\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}\right] - \left[-\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos nx\right] \\ &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}, x \neq k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

【2973】 把下列函数展开成傅里叶级数:

$$f(x) = \int_0^x \ln \sqrt{\left|\cot \frac{t}{2}\right|} dt \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

解 将函数对 x 求导, 并利用 2972 题结论有

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2} \ln \left|\cot \frac{x}{2}\right| = -\frac{1}{2} \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{又} \quad f'(x) &= -\frac{1}{2} \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left|\cos \frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2} \ln \left|\sin \frac{x}{2}\right|,\end{aligned}$$

在 $(-\pi, \pi)$ 内绝对可积, 有

$$\int_0^x \ln \sqrt{\left|\cot \frac{t}{2}\right|} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

【2974】 函数

$$x = x(s), y = y(s) \quad (0 \leq s \leq 4a).$$

是正方形周边 $0 < x < a, 0 < y < a$ 的参数表达式, 其中 s 为逆时针方向从 $O(0,0)$ 点算起的弧长, 把这些函数展开成傅里叶级数.

解 由定义, $x(s)$ 的表达式为

$$x(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s \leq a, \\ a, & a \leq s \leq 2a, \\ 3a - s, & 2a \leq s \leq 3a, \\ 0, & 3a \leq s \leq 4a. \end{cases}$$

于是 $x(s)$ 在 $[0, 4a]$ 上的傅里叶级数展开为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi s}{2a} + b_n \sin \frac{n\pi s}{2a} \right),$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) ds \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int_0^a s ds + \int_a^{2a} a ds + \int_{2a}^{3a} (3a-s) ds \right] = a, \\ a_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int_0^a s \cos \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_a^{2a} a \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{2a}^{3a} (3a-s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\ &= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2a^2}{n\pi} \right) (\cos \frac{n\pi}{2} - 1) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] + \left[\left(\frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} - \left(\frac{2a^2}{n\pi} \right) (\cos \frac{3n\pi}{2} - \cos n\pi) \right] \right\} \\ &= \frac{2a}{(n\pi)^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 - \cos \frac{3n\pi}{2} + \cos n\pi \right) \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{4a}{\pi^2 (2k+1)^2}, & n = 2k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

其中, $k = 0, 1, 2, \dots$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int_0^a s \sin \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_a^{2a} a \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{2a}^{3a} (3a-s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\ &= \frac{1}{2a} \left\{ \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(-\frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} + \frac{6a^2}{n\pi} \cos n\pi \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n\pi} \cos n\pi \right) + \left(-\frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \right] \\
& = \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \\
& = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ \frac{4a(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2}, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

因而由展开定理且 $x(0) = x(4a)$, $x(s)$ 的傅里叶展式为

$$\begin{aligned}
x(s) = & \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\
& + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a}, \quad s \in [0, 4a].
\end{aligned}$$

类似地, $y(s)$ 的表达式为

$$y(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq a, \\ s-a, & a \leq s \leq 2a, \\ a, & 2a \leq s \leq 3a, \\ 4a-s, & 3a \leq s \leq 4a. \end{cases}$$

从而, $y(s)$ 在 $[0, 4a]$ 上的傅里叶级数展开式为

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi s}{2a} + B_n \sin \frac{n\pi s}{2a} \right),$$

其中

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} y(s) ds \\
&= \frac{1}{2a} \left[\int_a^{2a} (s-a) ds + \int_{2a}^{3a} a ds + \int_{3a}^{4a} (4a-s) ds \right] \\
&= a, \\
A_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} y(s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \\
&= \frac{1}{2a} \left[\int_a^{2a} (s-a) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{2a}^{3a} a \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{3a}^{4a} (4a-s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\left(-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \right] + \left[\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\left(-\frac{8a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) - \left(-\frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} - 1 + \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \\
&= \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ \frac{-4a}{\pi^2 (2k+1)^2}, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} y(s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \\
&= \frac{1}{2a} \left[\int_a^{2a} (s-a) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{2a}^{3a} a \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{3a}^{4a} (4a-s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\
&= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\left(-\frac{4a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) - \left(-\frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right) \right] \\
&\quad + \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} + \frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi \right] \\
&\quad + \left[\left(-\frac{8a^2}{n\pi} + \frac{8a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(-\frac{8a^2}{n\pi} - \frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\sin \frac{3n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\
&= \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ \frac{(-1)^{k+1} 4a}{\pi^2 (2k+1)^2}, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

因而由展开定理且 $y(0) = y(4a)$ 有 $y(s)$ 的傅里叶展式为

$$y(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\ + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a}, s \in [0, 4a].$$

【2975】 应该如何把给定在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延拓到区间 $(-\pi, \pi)$, 使得它的傅里叶级数展开式具有以下形式:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi).$$

解 因为展开式中无正弦值, 于是 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 内应满足 $f(-x) = f(x)$, 设 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 的部分记为 $g(x)$ 则由题意有

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \cos 2nx dx \\ = I_1 + I_2, n = 0, 1, 2, \dots.$$

$$\text{又} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nx dx$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[x = \pi - y]{\text{令 } y = \pi - x} \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - y) \cos 2ny dy \\ & = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\pi - y) \cos 2ny dy, \end{aligned}$$

$$\text{于是} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f(\pi - x) + g(x)] \cos 2nx dx = 0, n = 0, 1, 2, \dots.$$

从而任意的 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 有

$$f(\pi - x) + g(x) = 0,$$

$$\text{即} \quad g(x) = -f(\pi - x).$$

综上所述, 首先在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内定义一个函数, 使它等于 $-f(\pi - x)$,

其次, 再按偶函数延拓到 $(-\pi, 0)$, 设延拓的函数记为 $\tilde{f}(x)$. 则

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ -f(\pi-x), & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ f(-x), & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ -f(\pi+x), & -\pi < x < -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

【2976】 应该如何把给定在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 的可积函数 $f(x)$ 延拓到区间 $(-\pi, \pi)$, 使得它的傅里叶级数展开式具有以下形式: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x (-\pi < x < \pi)$.

解 因为展式中无余弦项, 于是 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 内应满足 $f(-x) = -f(x)$, 令 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 部分记作 $g(x)$, 则由题设有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \sin 2nx \, dx \\ &= I_1 + I_2, n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

其中 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2nx \, dx$

$$\begin{aligned} &\frac{\substack{\text{令 } y = \pi - x \\ x = \pi - y}}{\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}} f(\pi - y) \sin 2ny \, dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -f(\pi - y) \sin 2ny \, dy, \end{aligned}$$

于是, 有 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [g(x) - f(\pi - x)] \sin 2nx \, dx = 0, n = 1, 2, \dots$

从而对任意 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 有 $g(x) - f(\pi - x) = 0$, 即 $g(x) = f(\pi - x)$. 综上所述, 首先在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内定义一个函数, 使它等于 $f(\pi - x)$, 其次再按奇函数延拓到 $(-\pi, \pi)$, 设 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 上的函数记为 $\tilde{f}(x)$ 则

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ f(\pi - x), & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ -f(-x), & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ -f(\pi + x), & -\pi < x < -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

【2977】 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 把函数:

$$f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

(1) 按照角的奇倍数的余弦; (2) 按照角的奇倍数的正弦. 展开, 作出(1) 和(2) 情况的傅里叶级数的和的图形.

解 (1) 由 2975 题结论, 延拓函数, 使

$$f(-x) = f(x), f(\pi - x) = -f(x),$$

$$\begin{aligned} \text{于是有 } a_{2k+1} &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k+1)x dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-f(\pi-x)] \cos(2k+1)x dx \right\}. \end{aligned}$$

在上式右端第二个积分中令 $\pi - x = y$, 则有与第一个积分同样的结果, 于是

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k+1)x dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(2k+1)x dx \\ &= \frac{4}{(2k+1)\pi} x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(2k+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad - \frac{4}{(2k+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \sin(2k+1)x dx \\ &= \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \left[\frac{\pi}{2} \cos(2k+1)x - 2x \cos(2k+1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8}{(2k+1)^2 \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k+1)x dx \\
& = -\frac{2}{(2k+1)^2} + \frac{8}{(2k+1)^3 \pi} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} \\
& = -\frac{2}{(2k+1)^2} + \frac{8 \cdot (-1)^k}{(2k+1)^3 \pi}, k = 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

从而, $f(x)$ 的展开式为

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \right] \cdot \cos(2k+1)x \right\} \\
& = x \left(\frac{\pi}{2} - x \right), x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].
\end{aligned}$$

其和的图形如 2977 题图.

(2) 由 2976 题的结论, 延拓函数, 使 $f(-x) = -f(x)$, $f(\pi - x) = f(x)$, 于是有

$$\begin{aligned}
b_{2k+1} &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x dx \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\pi-x) \sin(2k+1)x dx \right],
\end{aligned}$$

现在上式右端第二个积分中令 $\pi - x = y$, 则有与第一个积分同样的结论, 于是

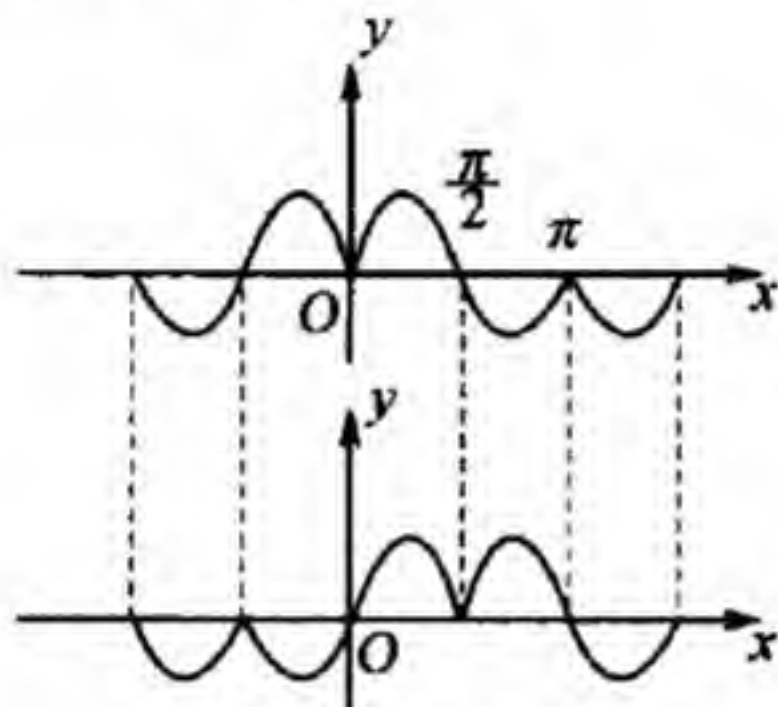
$$\begin{aligned}
b_{2k+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x dx \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin(2k+1)x dx \\
&= -\frac{4}{(2k+1)\pi} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos(2k+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
& \quad + \frac{4}{(2k+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \cos(2k+1)x dx \\
&= \frac{4}{(2k+1)^2 \pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \sin(2k+1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
& \quad + \frac{8}{(2k+1)^2 \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)x dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{8}{(2k+1)^3\pi}, k=0,1,2\cdots,$$

从而 $f(x)$ 的展式为

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{4}{(2k+1)^3\pi} \right] \sin(2k+1)x \right\} \\ & = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

其和的图形如 2977 题图所示.



2977 题图

【2978】 函数 $f(x)$ 是以 π 为周期的反周期函数,亦即:

$$f(x+\pi) = -f(x),$$

这个函数在区间 $(-\pi, \pi)$ 的傅里叶级数具有什么特征?

解 由

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 f(\pi+x) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right], \\ & \qquad \qquad \qquad n=0,1,2\cdots. \end{aligned}$$

在上式右端第一个积分中令 $x+\pi=y$, 则有

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [(-1)^{n+1} + 1] f(x) \cos nx \, dx,$$

从而有 $a_{2n}=0, n=0,1,2\cdots$ 同理, 有 $b_{2n}=0, n=1,2\cdots$, 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数的特性为

$$a_{2n}=0, n=0,1,2\cdots, b_{2n}=0, n=1,2\cdots.$$

【2979】 若 $f(x+\pi) = f(x)$, 该函数在区间 $(-\pi, \pi)$ 的傅里叶级数具有什么特征?

解 和 2978 题类似, 我们有

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [(-1)^n + 1] f(x) \cos nx \, dx, n = 0, 1, 2, \dots$$

于是有 $a_{2n+1} = 0, (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$,

同理有 $b_{2n+1} = 0, (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$.

从而 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数的特性为

$$a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0, n = 1, 2, 3, \dots$$

【2980】 一个具有周期为 2π 的函数 $y = f(x)$, 若函数的图形: (1) 以 $(0, 0), (\pm \frac{\pi}{2}, 0)$ 点为对称中心; (2) 以坐标原点为对称中心及以 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 为对称轴, 则其傅里叶系数 $a_n, b_n (n = 1, 2, \dots)$ 具有什么特征?

解 (1) 设 $f(x)$ 满足

$$f(-x) = -f(x), f(\pi - x) = -f(x),$$

从而 $a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots,$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad b_n &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi [-f(\pi - x)] \sin nx \, dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y) \sin ny \, dy \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + (-1)^n] f(x) \sin nx \, dx, \end{aligned}$$

于是 $b_{2n-1} = 0, n = 1, 2, 3, \dots,$

从而 $f(x)$ 的傅里叶级数的特性为

$$a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_{2n-1} = 0, n = 1, 2, 3, \dots$$

(2) 设 $f(x)$ 满足

$$f(-x) = -f(x), f(\pi - x) = f(x),$$

和(1) 相同,

$$a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + (-1)^{n+1}] f(x) \sin x dx,$$

于是 $b_{2n} = 0, n = 1, 2, 3, \dots,$

从而, $f(x)$ 的傅里叶系数的特性为

$$a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots.$$

【2981】 若 $\varphi(-x) = \psi(x)$, 函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 $\alpha_n, \beta_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 之间是什么关系?

解 函数 $\varphi(x)$ 的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx.$$

函数 $\psi(x)$ 的傅里叶系数为

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx.$$

因为

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx \right],$$

现在上式右端两个积分中作变换 $-x = y$, 将 $\varphi(-x) = \psi(x)$ 代入上式有

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \psi(x) \cos nx dx + \int_{-\pi}^0 \psi(x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx = \alpha_n, \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi(x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} \psi(x) \sin nx dx - \int_{-\pi}^0 \psi(x) \sin nx dx \right] \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx = -\beta_n, \end{aligned}$$

从而 $\varphi(x), \psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n 的关系为

$$a_n = \alpha_n, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = -\beta_n, n = 1, 2, 3, \dots.$$

【2982】 若 $\varphi(-x) = -\psi(x)$, 函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 彼此之间是什么关系?

解 设函数 $\varphi(x)$ 的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx.$$

函数 $\psi(x)$ 的傅里叶系数为

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx \, dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx \, dx.$$

$$\text{因为 } a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi(x) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx \right],$$

现在上式右端两个积分中作变换 $-x = y$, 且将 $\varphi(-x) = -\psi(x)$ 代入上式有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\int_0^{\pi} \psi(x) \cos nx \, dx - \int_{-\pi}^0 \psi(x) \cos nx \, dx \right] \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx \, dx = -\alpha_n, \end{aligned}$$

同理有 $b_n = \beta_n$, 于是, $\varphi(x), \psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n 的关系为 $a_n = -\alpha_n, n = 0, 1, 2, \dots$,

$$b_n = \beta_n, n = 1, 2, 3, \dots.$$

【2983】 已知具有周期 2π 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), 计算有“平移”的函数 $f(x+h)$ (h 为常数) 的傅里叶系数 \bar{a}_n, \bar{b}_n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

解 由题意

$$\bar{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \cos nx \, dx,$$

在上式中令 $y = x + h$ 和 $f(x)$ 的周期性有

$$\begin{aligned}\bar{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(y) [\cos nh \cos ny + \sin nh \sin ny] dy \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \cos nh dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \sin nh dx \right] \\ &= a_n \cos nh + b_n \sin nh.\end{aligned}$$

同理, 有 $\bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh$.

【2984】 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_n, b_n (n = 0, 1, 2, \dots)$, 计算斯捷克洛夫函数

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi$$

的傅里叶系数 $A_n, B_n (n = 0, 1, 2, \dots)$.

解 由

$$\begin{aligned}f_h(x+2\pi) &= \frac{1}{2h} \int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi = f_h(x).\end{aligned}$$

知 $f_h(x)$ 仍以 2π 为周期, 从而有

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_h(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \int_{-h}^h f(x+y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi h} \int_{-h}^h dy \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \cos nx dx.\end{aligned}$$

由 2983 题的结论有

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \cos nx dx = a_n \cos ny + b_n \sin ny,$$

于是 $A_n = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (a_n \cos ny + b_n \sin ny) dy$

$$= \frac{a_n}{h} \int_0^h \cos ny dy = \begin{cases} a_n, & n = 0, \\ \frac{a_n \sin nh}{nh}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

即 $A_0 = a_0, A_n = \frac{a_n \sin nh}{nh}, (n = 1, 2, \dots).$

同理 $B_n = \frac{b_n \sin nh}{nh}, n = 1, 2, \dots.$

【2985】 令 $f(x)$ 为带有周期为 2π 的连续函数, 而 $a_n, b_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 为它的傅里叶系数. 求解卷积函数:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt,$$

的傅里叶系数 $A_n, B_n (n = 0, 1, 2, \dots).$

利用所得的结果, 推导李雅普洛夫等式.

解 因卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (x+t) dt,$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } F(x+2\pi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+2\pi+t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt = F(x), \end{aligned}$$

从而 $F(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 设 A_n, B_n 为 $F(x)$ 的傅里叶系数, 故有

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \right]^2 = a_0^2, \\ A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos nx dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi) (\cos t \xi \cos t + \sin t \xi \sin t) d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [a_n f(t) \cos nt + b_n f(t) \sin nt] dt \\
&= a_n^2 + b_n^2,
\end{aligned}$$

这里 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数.

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi) (\sin t \xi \cos t - \cos t \xi \sin t) d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [b_n f(t) \cos nt - a_n f(t) \sin nt] dt \\
&= b_n a_n - a_n b_n = 0.
\end{aligned}$$

由 $f(x)$ 的连续性知, $F(x)$ 也是连续函数, 且 $B_n = 0$, 从而由展开定理有

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx,$$

于是有 $F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$

又 $A_0 = a_0^2, A_n = a_n^2 + b_n^2,$

$$F(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(0+t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt,$$

故有 $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$

也就是李雅普诺夫等式成立.

§ 7. 级数的求和法

1. 直接求和法 若

$$u_n = v_{n+1} - v_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

与 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_\infty,$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1,$

特别是若 $u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}}.$

其中数 $a_i (i = 1, 2, \dots)$ 形成公差为 d 的算术级数. 则

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情况下, 未知级数能表为下列已知级数的线性组合:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ 等等.}$$

2. 阿贝尔方法 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

在最简单的例子中幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和可用逐项微分或积分法求得.

3. 三角级数的求和法 为了求级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

的和, 常常把它们看作是复数域内幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (其中 $z = e^{ix}$) 的实的数部分及相应的虚数部分的系数.

在许多情况下级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1),$$

是有用的.

求下列级数的和(2986 ~ 3000).

$$\text{【2986】} \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2m+1} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{【2987】} \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

解 因为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right], \end{aligned}$$

且由 2549 知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

【2988】 $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$

解 $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$- \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right) \right.$$

$$\left. + (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} - 1 \right\}$$

$$= 2 \ln 2 - 1.$$

【2989】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$

解 因为

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3} = \frac{3n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

及 2987 的结论, 于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3} \right)$$

$$- \frac{5}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)$$

$$= \frac{1}{4}.$$

【2990】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} (m \text{ 为自然数}).$

解 因为

$$\frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} \right),$$

于是有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^l \frac{1}{n(n+m)} \\ &= \frac{1}{m} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^l \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} \right) \\ &= \frac{1}{m} \lim_{l \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{l+1} - \frac{1}{l+2} - \cdots - \frac{1}{l+m} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right). \end{aligned}$$

【2991】 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$

解 由

$$\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} \right],$$

有

$$\begin{aligned} \text{原级数} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{2} (2\ln 2 - 1) \quad (2988 \text{ 题结论}) \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【2992】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

解 原级数

$$\begin{aligned} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m \frac{1}{n^2 - 1} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

【2993】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

解 由

$$\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2},$$

有 原级数 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$
 $= \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = 1.$

【2994】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

解 由

$$\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1},$$

有 $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n(2n+1)}$
 $= \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=1}^m \frac{1}{2n+1}$
 $= \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - 2 \left(\sum_{k=1}^{2m+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \frac{1}{l} - 1 \right)$
 $= c + \ln m + \epsilon_1 - 2 [(c + \ln(2m+1)) + \epsilon_2]$
 $\quad - \frac{1}{2} (c + \ln m + \epsilon_3) - 1]$
 $= 2 \ln \frac{m}{2m+1} + \alpha + 2,$

其中 $\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 \rightarrow 0, \epsilon_3 \rightarrow 0, \alpha = \epsilon_1 - 2\epsilon_2 + \epsilon_3 \rightarrow 0, (m \rightarrow \infty)$. 故

$$\begin{aligned} \text{原级数} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(2n+1)} \\ &= 2 \ln \frac{1}{2} + 2 = 2(1 - \ln 2). \end{aligned}$$

【2995】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \text{原级数} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{n^2}{n!} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ 1 + 2 + \sum_{n=3}^m \frac{n^2}{n!} \right\} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \sum_{n=3}^m \left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} \right] \right\} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k!} + \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{l!} \right\} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ 2 \left(1 + \sum_{s=1}^m \frac{1}{s!} \right) + O\left(\frac{1}{m}\right) \right\} = 2e.
 \end{aligned}$$

$$\text{【2996】} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \text{原级数} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \\
 &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!},
 \end{aligned}$$

$$\text{又设} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n,$$

$$\text{则} \quad d_n = \sum_{k+l=n} \frac{1}{k!l!} = \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!} = \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n C_n^s = \frac{2^n}{n!}.$$

$$\text{于是} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)^2 = e^2.$$

故原级数 $= 3e^2$.

$$\text{【2997】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

解 由

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n(n+1)},$$

$$\begin{aligned}
 \text{有} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} - 2 = \frac{\pi^2}{3} - 2.
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) - 2 = \frac{\pi^2}{3} - 3.$$

【2998】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}.$

解 因为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n(n+1)(n+2)} \\ &= -\frac{3}{(n+1)^2(n+2)^2} - \frac{12n+8}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & 2\left[\frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{n^2(n+2)^2} - \frac{2}{(n+1)^2(n+2)^2}\right] \\ &= \frac{12n+10}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{2}{n(n+2)} = \frac{4}{n^2(n+2)^2}, \quad (3)$$

现把 ① + ② + ③ 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+2)} \\ &+ \frac{6}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{2}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}. \end{aligned}$$

又由 2961 题, 2990 题, 2987 题, 2997 题的结论知

$$\begin{aligned} \text{原级数} &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} \right. \\ &\quad - \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \\ &\quad + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + 6 \cdot \frac{1}{4} \\
& - \left(\frac{\pi^2}{3} - 3 - \frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{\pi^2}{3} - 3\right) \} \\
& = \frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}.
\end{aligned}$$

【2999】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$

解 由

$$\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} \right].$$

有
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right. \\
&\quad \left. - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \dots \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right] \\
&= \frac{1}{2} (\cos 1 - \sin 1).
\end{aligned}$$

【3000】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}$

解 原级数 $= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m \frac{(-1)^n}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{3} \sum_{l=4}^{m+2} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \right] \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{3} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{3} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + O\left(\frac{1}{m}\right) \right] \\
&= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18}.
\end{aligned}$$

【3001】 令 $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$, 求级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$ 的和.

解 令

$$\begin{aligned} P(n) &= a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n^m \\ &= a_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_m n(n-1)\cdots(n-m+1), \end{aligned}$$

其中 $\alpha_i (i = 0, 1, \cdots, m)$ 由上式求出, 于是

原级数

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n!} x^n \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + a_1 x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \\ &\quad + a_m x^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \\ &= a_0 e^x + a_1 x e^x + \cdots + a_m x^m e^x \\ &= e^x (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m). \end{aligned}$$

求出下列级数的和(3002 ~ 3005).

【3002】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n n!} x^n.$

解 由部分和

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2 + 1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= 1 + 2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &\quad + \sum_{n=3}^N \left[\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \right] \\ &\quad + \left[\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{l=2}^N \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2}\right)^l \right] \\ &\quad + \left[1 + \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \sum_{n=3}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \right] + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k + \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{l=0}^N \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2}\right)^l \\
&\quad + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \\
&= \left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right) + 1\right] \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + O\left(\frac{1}{N^2}\right),
\end{aligned}$$

知 原级数 $= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$= \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) e^{\frac{x}{2}}.$$

【3003】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n.$

解 由 $\frac{n^3}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!},$

有 原级数 $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} (-x)^n$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(-x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\
&\quad - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n+1)!} \\
&= -\frac{x}{2} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\
&\quad - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= -\frac{x}{2} + x^2 e^{-x} + (e^{-x} - 1 + x) \\
&\quad + \frac{1}{x} \left(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!}\right) \\
&= e^{-x} \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

【3004】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + 1)}{(2n)!} x^{2n}.$

解 因为

$$\frac{2n^2+1}{(2n)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n-2)!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!},$$

于是 原级数 $= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-2)!} x^{2n}$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} x^{2n-2} - \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - 1$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x - \frac{x}{2} \sin x.$$

【3005】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}$

解 若 $x=0$ 时, 级数的和为零, 设 $x>0$, S_N 为级数的部分和, 令 $v=\sqrt{x}$, 于是有

$$S_N = \sum_{n=0}^N \frac{n^2 v^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{4v} \sum_{n=0}^N \frac{(2n)^2 - 1}{(2n+1)!} v^{2n+1} + \frac{1}{4v} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{4v} \sum_{n=0}^N \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!} v^{2n+1} + \frac{1}{4v} \operatorname{sh} v + o(1)$$

$$= \frac{1}{4v} \left[v^2 \sum_{n=1}^N \frac{v^{2n-1}}{(2n-1)!} - v \sum_{n=0}^N \frac{v^{2n}}{(2n)!} \right] + \frac{1}{4v} \operatorname{sh} v + o(1)$$

$$= \frac{1}{4v} [v^2 \operatorname{sh} v - v \operatorname{sh} v + o(1)] + \frac{1}{4v} \operatorname{sh} v + o(1)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{v^2+1}{v} \operatorname{sh} v - \operatorname{ch} v \right) + o(1)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x} \right) + o(1),$$

因而当 $x > 0$ 时, 原级数 $= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x} \right)$.

若 $x < 0$, 令 $y = \sqrt{|x|}$, 则 $x = -y^2$, 于是有

$$\begin{aligned}
 S_N &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2 (-1)^n y^{2n}}{(2n+1)!} \\
 &= \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n [(2n)^2 - 1]}{(2n+1)!} y^{2n+1} + \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n (2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!} y^{2n+1} + \frac{1}{4y} \sin y + o(1) \\
 &= \frac{1}{4y} \left[y^2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n y^{2n-1}}{(2n-1)!} - y \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{4y} \sin y + o(1) \\
 &= \frac{1}{4y} [-y^2 \sin y - y \cos y + o(1)] + \frac{1}{4y} \sin y + o(1) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{-y^2 + 1}{y} \sin y - \cos y \right) + o(1) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} \sin \sqrt{|x|} - \cos \sqrt{|x|} \right) + o(1),
 \end{aligned}$$

因而, 当 $x < 0$ 时

$$\begin{aligned}
 \text{原级数} &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} \sin \sqrt{|x|} - \cos \sqrt{|x|} \right).
 \end{aligned}$$

用逐项微分法求出级数的和(3006 ~ 3010)

【3006】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

解 令 $a_n = \frac{1}{n}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

从而收敛半径为 1, 当 $x = 1$ 时, 级数发散, 当 $x = -1$ 时, 级数收敛, 故级数的收敛域为 $[-1, 1)$.

当 $x \in [-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

当 $|x| < 1$ 时, 逐项求导有

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

又 $f(0) = 0$, 因此

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \\ &= \ln \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1, \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

由阿贝尔定理知 ① 式当 $x \in [-1, 1)$ 时成立.

【3007】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$

解 令 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)},$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)} = 1,$

于是收敛半径为 1.

当 $|x| = 1$ 时, 级数绝对收敛, 于是级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

当 $x \in [-1, 1]$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)},$$

当 $|x| < 1$ 时, 逐项求导有

$$f'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = 2 \arctan x, \quad (2907 \text{ 题结论}).$$

又 $f(0) = 0$, 从而

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t) dt = 2 \int_0^x \arctan t dt \\ &= 2x \arctan x - 2 \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= 2x \arctan x - \ln(1+x^2). \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

当 $|x|=1$ 时,级数为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= \frac{\pi}{2} - \ln 2, \text{ (2938 题的结论).}\end{aligned}$$

由阿贝尔定理知,上述结果 ① 包括端点在内也成立,即 $x \in [-1, 1]$ 时,① 式成立.

【3008】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n} + 1}{4n+1}.$

解 令 $a_n = \frac{1}{4n+1},$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{4n+1} = 1.$

于是收敛半径为 1,当 $|x|=1$ 时,级数发散,因而级数的收敛域为 $(-1, 1).$

当 $x \in (-1, 1)$ 时,令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1},$$

逐项求导有

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}.$$

又 $f(0) = 0$, 于是

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t^4} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x, \quad |x| < 1.\end{aligned}$$

【3009】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d) \cdots [a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n, (d > 0).$

提示:级数的导数乘以 $1-x$.

解 设 $a \neq -md, m = 0, 1, 2, \dots$ 这是因为若 $a = -md$, 则原

级数从 $m+1$ 项开始恒为零, 故此时原级为一多项式

$$\sum_{n=1}^m \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n,$$

它对任何 x 皆收敛.

$$\text{令 } a_n = \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd}, n = 1, 2, 3, \cdots,$$

$$\text{有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)d}{a+nd} = 1,$$

于是收敛半径为 1.

1° $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n,$$

逐项求导有

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot d \cdot 2d \cdots (n-1)d} x^{n-1},$$

以 $(1-x)$ 乘上式两端, 有

$$\begin{aligned} (1-x)f'(x) &= \frac{a}{d} + \frac{a}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n \\ &= \frac{a}{d} + \frac{a}{d} f(x). \end{aligned}$$

$$\text{从而 } f'(x) - \frac{a}{d} \cdot \frac{1}{1-x} f(x) = \frac{a}{d} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

解方程有

$$f(x) = c(1-x)^{-\frac{a}{d}} - 1, x \in (-1, 1), c \text{ 为常数.}$$

又 $f(0) = 0$, 有 $0 = c - 1$, 即 $c = 1$, 于是, 当 $|x| < 1$ 时

$$f(x) = (1-x)^{-\frac{a}{d}} - 1. \quad \textcircled{1}$$

2° $x = \pm 1$ 时, 当 $x = 1$, 则原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 易知存在 $n_0 > 0$,

当 $n > n_0$ 时有 $a + nd > 0$, 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(d-a)n}{a+nd} = \frac{d-a}{d},$$

由拉阿贝判别法知,当 $a < 0$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛,当 $a > 0$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散,又 $a > 0$ 时, $a_n > 0$, 于是 $a > 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $a < 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

当 $x = -1$ 时,此时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, 当 $a < 0$ 时,因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛,现考虑 $a > 0$ 时情形,若 $a \geq d$, 则有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)d}{a+nd} \leq 1,$$

于是 $a_{n+1} \geq a_n > 0, n = 1, 2, \dots$.

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 的通项不趋于零,故该级数发散.

若 $0 < a < d$ 时,有

$$\ln a_n = \sum_{k=1}^n \ln \left[\frac{a + (k-1)d}{kd} \right] = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right), \quad (2)$$

因为 $0 < a < d$, 有

$$\ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right) < 0, k = 1, 2, 3, \dots,$$

而 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right)}{-\frac{d-a}{kd}} = 1,$

又 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散,从而 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right)$ 发散,于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right) = -\infty,$$

从而由 (2) 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = -\infty.$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

(3)

又 $0 < a < d$,

有 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)d}{a+nd} > 1$,

于是 $a_n > a_{n+1} > 0, n = 1, 2, 3, 4, \dots$. ④

从而, 由 ③ 和 ④ 及莱布尼兹判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

综上所述, 当 $a < 0$ 时, 原幂级数的收敛域为 $x \in [-1, 1]$, 且公式 ① 成立, 当 $0 < a < d$ 时, 原幂级数的收敛域为 $x \in [-1, 1)$, 且在其上, 公式 ① 成立, 当 $a \geq d$ 时, 原幂级数的收敛域为 $x \in (-1, 1)$, 且在其上, 公式 ① 成立.

$$\text{【3010】} \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots$$

解 令

$$a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n} \cdot \frac{1}{2^n},$$

$$\text{有} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(3n+3)}{3n+1} = 2.$$

从而收敛半径为 2.

1° 当 $x \in (-2, 2)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n} \left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

逐项求导有

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots (3n-3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1},$$

以 $\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ 乘上式两端有

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) f'(x) = \frac{1}{6} f(x) + \frac{1}{6},$$

$$\text{即} \quad f'(x) - \frac{1}{6\left(1 - \frac{x}{2}\right)} f(x) = \frac{1}{6\left(1 - \frac{x}{2}\right)}.$$

解方程有 $f(x) = c\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1, x \in (-2, 2)$.

又 $f(0) = 0$, 于是 $c = 1$, 从而当 $x \in (-2, 2)$ 时, 有

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1. \quad (1)$$

2° $x = 2$ 时, 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n}$,

$$\text{令 } b_n = \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n}, n = 1, 2, \cdots.$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1,$$

故由拉阿贝判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

3° 当 $x = -2$ 时, 此时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$,

$$\text{又 } \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{3n+3}{3n+1} > 1,$$

$$\text{于是 } b_n > b_{n+1} > 0, n = 1, 2, 3, \cdots. \quad (2)$$

$$\text{而 } \ln b_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{3k-2}{3k} = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{2}{3k}\right),$$

$$\text{由 } \ln \left(1 - \frac{2}{3k}\right) < 0, k = 1, 2, 3, \cdots,$$

$$\text{且 } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{2}{3k}\right)}{-\frac{2}{3k}} = 1,$$

知 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{3k}\right)$ 发散, 于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{3k}\right) = -\infty,$$

$$\text{从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln b_n = -\infty,$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (3)$$

由 (2) 及 (3) 式, 据莱布尼兹判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ 收敛.

综上所述, 原级数的收敛域为 $x \in [-2, 2)$, 且在 $[-2, 2)$ 上,

公式①成立.

用逐项积分法求出级数的和(3011 ~ 3013).

$$\text{【3011】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

解 令 $a_n = n^2$,

$$\text{有} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

于是收敛半径为 1.

当 $|x| = 1$ 时, 由 $n^2 \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$ 知, 级数发散, 从而级数的收敛域为 $(-1, 1)$, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1},$$

逐项积分有

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

因此, 当 $x \in (-1, 1)$ 时

$$f(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

$$\text{【3012】} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n.$$

解 令 $a_n = n(n+2)$,

$$\text{有} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = 1,$$

于是收敛半径为 1. 当 $|x| = 1$ 时, 又由 $n(n+2) \rightarrow \infty$ 知, 级数发散, 从而级数的收敛域为 $(-1, 1)$. 现令

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1} \\ &= xg(x), x \in (-1, 1), \end{aligned}$$

$$\text{其中} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1}.$$

由 2911 题结论有

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) \int_0^x t^{n-1} dt \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
 &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x}{1-x} = \frac{3x-2x^2}{(1-x)^2},
 \end{aligned}$$

于是 $g(x) = [G(x)]' = \left[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{3-x}{(1-x)^3}.$

因此 $f(x) = xg(x) = \frac{x(3-x)}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1).$

【3013】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$

解 令 $a_n = \frac{2n+1}{n!},$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3} = +\infty,$

于是级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty).$ 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}, x \in (-\infty, +\infty),$$

逐项积分有

$$\begin{aligned}
 \int_0^x f(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n+1)t^{2n}}{n!} dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = xe^{x^2},
 \end{aligned}$$

从而 $f(x) = (xe^{x^2})' = e^{x^2}(1+2x^2), x \in (-\infty, +\infty).$

利用阿贝尔方法求出下列级数的和(3014 ~ 3017).

【3014】 $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots.$

解 考察级数 $x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots,$

①

易知级数(1)的收敛域为 $(-1, 1],$ 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots,$$

逐项微分有

$$f'(x) = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots = \frac{1}{1+x^3},$$

又 $f(0) = 0$, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

这里 $x \in (-1, 1)$, 于是由阿贝尔定理有

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots \\ = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

【3015】 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$.

解 考察级数

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad \textcircled{1}$$

易知级数(1)的收敛域为 $[-1, 1]$, 由 2907 题的结论知, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

由阿贝尔定理有

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x \\ &= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

【3016】 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots$.

解 考察级数

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \cdots, \quad \textcircled{1}$$

易知级数 ① 的收敛域为 $(-1, 1]$, 由 2910 题的结论知, 当 $x \in$

$(-1, 1)$ 时, 有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

由阿贝尔定理有

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

【3017】 $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \dots$

解 考察级数

$$x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots, \quad (1)$$

易知级数 (1) 的收敛域为 $[-1, 1]$, 由 2870 题结论知, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots$$

由阿贝尔定理有

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \dots = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2},$$

求出下列三角级数的和 (3018 ~ 3026).

【3018】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

解 由 $\ln \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, z = e^{ix},$

及 $\ln \frac{1}{1-z} = -\ln(1 - \cos x - i \sin x)$

$$= -\frac{1}{2} \ln(2 - 2\cos x) + i \arctan \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

$$(\text{因为 } \ln z = \ln |z| e^{i \arg z} = \ln |z| + i \arg z)$$

$$= -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| + i \arctan \frac{\sin x}{1 - \cos x}, \quad (1)$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad (2)$

知
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|, x \in (0, 2\pi), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} &= \arctan \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \arctan \left(\cot \frac{x}{2} \right) \\ &= \arctan \left(\tan \frac{\pi - x}{2} \right) = \frac{\pi - x}{2}, \end{aligned}$$

$$x \in (0, 2\pi).$$

【3019】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

解 见题 3018.

【3020】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}.$$

解 由积化和差公式及 3019 题结论知

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-\alpha)}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x+\alpha)}{n} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| 2 \sin \frac{x-\alpha}{2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| 2 \sin \frac{x+\alpha}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin \frac{x+\alpha}{2}}{\sin \frac{x-\alpha}{2}} \right|, \end{aligned}$$

其中收敛域为 $\{x \mid 0 < x - \alpha < 2\pi\} \cap \{x \mid 0 < x + \alpha < 2\pi\}$,
故当 $\alpha > 0$ 时, $x \in (\alpha, 2\pi - \alpha)$, 当 $\alpha < 0$ 时, $x \in (-\alpha, 2\pi + \alpha)$.

【3021】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n}, \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

解 由半角公式、积化和差及 3018 题结论有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\alpha \sin nx}{n} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x+2\alpha)}{n} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x-2\alpha)}{n},$$

下面分三种情形讨论此级数的和.

1° 当 $x \in (0, 2\pi), x \in (2\alpha, 2\pi - 2\alpha)$, 此时, 级数的和 S 为

$$S = \frac{\pi - x}{4} - \frac{\pi - (x + 2\alpha)}{8} - \frac{\pi - (x - 2\alpha)}{8} = 0.$$

2° 当 $x \in (0, 2\alpha)$ 时

$$S = \frac{\pi - x}{4} - \frac{\pi - (x + 2\alpha)}{8} + \frac{\pi - (2\alpha - x)}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

3° 当 $x \in (2\pi - 2\alpha, 2\pi)$ 时

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi - x}{4} - \frac{\pi - (x + 2\alpha - 2\pi)}{8} - \frac{\pi - (x - 2\alpha)}{8} \\ &= -\frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

这里用了 3018 题的结论及由 $2\pi < x + 2\alpha < 3\pi$, 可令

$$x + 2\alpha = 2\pi + \theta, \theta \in (0, \pi),$$

则有 $\sin n(x + 2\alpha) = \sin n(2\pi + \theta) = \sin n\theta$,

并以 $\theta = x + 2\alpha - 2\pi$ 代替 3018 题中 x .

【3022】
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

解 令
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},$$

由 3018 题的结论知

$$\begin{aligned} f(x) &= (\operatorname{sgn} x) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n|x|}{n} \\ &= \left(\operatorname{sgn} x \cdot \frac{\pi - |x|}{2} \right), x \in (-2\pi, 2\pi). \end{aligned}$$

令
$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},$$

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k},$$

有
$$f_2(x) = (\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(2|x|)}{k}$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{\pi - 2|x|}{2}, x \in (-\pi, \pi).$$

由 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,

当 $x \in (-\pi, \pi)$ 时, 有

$$(\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{\pi - |x|}{2} = f_1(x) + (\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{\pi - 2|x|}{4},$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } f_1(x) &= (\operatorname{sgn} x) \left(\frac{\pi - |x|}{2} - \frac{\pi - 2|x|}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x, x \in (-\pi, \pi). \end{aligned}$$

【3023】 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}.$

解 由

$$\ln \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

令 $z = -e^{ix}$,

$$\text{有 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} = -\frac{x}{2}, x \in (-\pi, \pi), \quad (1)$$

$$\text{和 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right). \quad (2)$$

$$\text{又 } \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{有 } & \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n+1} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(m+1)x}{m} + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(m-1)x}{m} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m} [\cos(m-1)x - \cos(m+1)x] \\ &\quad - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m} \sin mx \sin x \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2} \right) - \frac{x}{2} \sin x, x \in (-\pi, \pi).
\end{aligned}$$

【3024】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

解 令 $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},$

易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因而 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $F(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 由此, 我们只要求 $F(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的值, 又

$$2\sin x \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x = 1 - \cos 2nx,$$

于是当 $\tau \leq x \leq \pi - \tau$ ($\tau \in (0, \frac{\pi}{2})$ 是任意的) 时, 有

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x \right| \leq \frac{1}{\sin \tau},$$

从而, 由狄里克雷判别法知级数 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 在 $[\tau, \pi - \tau]$ 上一致收敛. 因而由逐项求导有当 $x \in [\tau, \pi - \tau]$ 时, 有

$$F'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = -\frac{\pi}{4},$$

(3022 题结论). ①

由 τ 的任意性知 ① 式在 $x \in (0, \pi)$ 时皆成立, 故

$$F(x) = -\frac{\pi}{4}x + C, x \in (0, \pi), \quad ②$$

其中 C 是常数. 又 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且由 2961 题结论

$$F(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

在 ② 式中令 $x \rightarrow 0^+$, 有 $C = \frac{\pi^2}{8},$

从而 $F(x) = -\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi^2}{8}, x \in [0, \pi).$

因此 $F(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}|x|, x \in [-\pi, \pi].$

【3025】 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$

解 由 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 及 3023 题的 ①, ② 式有

$$\begin{aligned} \text{原级数} &= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n+1} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin(m-1)x}{m} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin mx}{m} \cos x \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos mx}{m} \sin x \\ &= -(1 + \cos x) \left(-\frac{x}{2} \right) - \sin x \cdot \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{x}{2} (1 + \cos x) - \sin x \cdot \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right), \end{aligned}$$

$$x \in (-\pi, \pi).$$

【3026】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$

解 因为

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

令 $z = e^{ix},$

有 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!},$

$$e^z = e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} [\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)].$$

于是 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = e^{\cos x} \cos(\sin x), x \in (-\infty, +\infty).$

【3027】 作出下列曲线的图形:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2} = 0.$$

解 令 $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2}$,

显然 $f(x, y)$ 对 x, y 分别以 2π 为周期的周期函数, 于是我们仅需考虑如下定义域

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi\}.$$

设 $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}, t \in (-\infty, +\infty)$,

类似于 3024 题的办法, 及 3022 题求解过程中的关系, 有

$$g'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = -(\operatorname{sgn} t) \frac{\pi - |t|}{2}, 0 < |t| < 2\pi,$$

又 $g(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$

从而有 $g(t) = g(0) + \int_0^t g'(t) dt = g(0) - \frac{\pi}{2} |t| + \frac{1}{4} t^2.$

由 $\sin nx \cdot \sin ny = \frac{1}{2} [\cos n(x-y) - \cos n(x+y)],$

有
$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-y) - \cos n(x+y)}{n^2} \\ &= \frac{1}{2} [g(x-y) - g(x+y)] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[g(0) - \frac{\pi}{2} |x-y| + \frac{1}{4} (x-y)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[g(0) - \frac{\pi}{2} |x+y| + \frac{1}{4} (x+y)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} (|x+y| - |x-y|) \\ &\quad + \frac{1}{8} [(x-y)^2 - (x+y)^2] \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot 2\min\{x, y\} + \frac{1}{8} (-4xy) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} [\pi - \max\{x, y\}] \cdot \min\{x, y\}.$$

若 $x \leq y$, 则令 $f(x, y) = 0, (x, y) \in R$, 有 $x(\pi - y) = 0$, 即 $x = 0$ 或 $y = \pi$.

若 $x \geq y$, 则令 $f(x, y) = 0, (x, y) \in R$, 有 $y(\pi - x) = 0$, 即 $y = 0$ 或 $x = \pi$.

因此, 在 R 内, $x = 0, x = \pi, y = 0, y = \pi$ 各直线是 $f(x, y) = 0$ 的图形.

又由 $f(x, y)$ 的表达式知, 图形是按 x 和按 y 以 2π 为周期的周期函数, 从而

$$x = l\pi, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$y = m\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

诸直线皆为 $f(x, y) = 0$ 的图形, 且除此以外, 皆有 $f(x, y) \neq 0$, 因此, $f(x, y) = 0$ 的图形即为上述所指的两族直线, 这是两族分别与坐标轴平行且相距为 π 的直线族, 图形省略.

求出下列级数的和(3028 ~ 3033).

【3028】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}.$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n!)^2}{(2n+2)!} (2x)^{2n+2}}{\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 x^2}{(2n+2)(2n+1)} = x^2,$$

于是当 $|x| < 1$ 时, 幂级数收敛, 当 $|x| > 1$ 时, 发散, 当 $|x| = 1$ 时原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2 4^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n} = \frac{3}{2} > 1 (n \rightarrow \infty),$

于是由拉阿贝判别法知, 当 $|x| = 1$ 时, 原级数收敛, 因此, 该幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$, 且在 $[-1, 1]$ 上一致收敛, 从而其和函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 于是在 $(-1, 1)$ 上逐项求导有

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n(2x)^{2n-1}, (-1 < x < 1),$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 8n(2n-1)(2x)^{2n-2},$$

$$(-1 < x < 1).$$

于是

$$\begin{aligned} & -xf'(x) + (1-x^2)f''(x) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2x)^{2n} \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} \\ & \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2n-1)(2x)^{2n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n^2(2x)^{2n} + 4 \\ & \quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n^2(2x)^{2n} + 4 \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} 8(n+1)(2n+1)(2x)^{2n} \\ &= 4, (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

于是

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x) + \sqrt{1-x^2}f''(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$x \in (-1, 1).$$

两边积分有

$$\sqrt{1-x^2}f'(x) = 4\arcsin x + C, x \in (-1, 1).$$

由 $f(0) = 0$, 有 $C = 0$, 从而

$$f'(x) = \frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1).$$

对上式两边积分有

$$f(x) = 2(\arcsin x)^2 + C_1, x \in (-1, 1).$$

又由 $f(0) = 0$, 有 $C_1 = 0$, 于是我们有

$$f(x) = 2(\arcsin x)^2, x \in (-1, 1). \quad ①$$

又上式两端都是 $[-1, 1]$ 上的连续函数, 于当 $x = \pm 1$ 时, ① 式也成立, 由此, 我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n} = 2(\arcsin x)^2, x \in [-1, 1].$$

【3029】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4},$$

于是级数的收敛半径为 4, 即当 $|x| < 4$ 时, 级数收敛, $|x| > 4$

时, 级数发散, 当 $|x| = 4$ 时, 此级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (\pm 4)^n. \quad ①$

令 $a_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!},$

有 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2n+2}{2n+1} > 1.$

从而 $|a_{n+1}| > |a_n|$, 故 a_n 不趋于零, 级数 ① 发散, 因而原级数的收敛区间为 $(-4, 4)$

1° 当 $x \in [0, 4)$ 时, 令 $x = (2t)^2, 0 \leq t < 1$, 此时级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (2t)^{2n} = F(t), \quad t \in [0, 1).$$

于是 $(1-t^2)F(t) - 1 = \frac{t}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n(2t)^{2n-1},$

由 3028 题结论有

$$\begin{aligned} (1-t^2)F(t) - 1 &= \frac{t}{4} [2(\arcsin t)^2]' \\ &= \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t, t \in [0, 1), \end{aligned}$$

从而 $F(t) = \frac{1}{1-t^2} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t \right), t \in [0, 1).$

把 $t = \frac{\sqrt{x}}{2}$, 代入上式有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \frac{4}{4-x} + \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2}, x \in [0, 4).$$

2° 当 $x \in (-4, 0)$ 时, 令 $x = -(2t)^2, t \in (0, 1)$, 此时级数为

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-1)^n (2t)^{2n} \\ &= G(t), t \in (0, 1). \end{aligned}$$

经计算有

$$\begin{aligned} &1 - (1+t^2)G(t) \\ &= t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n (2t)^{2n-1} \\ &= t \cdot g(t), t \in (0, 1), \end{aligned}$$

$$\text{其中 } g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n (2t)^{2n-1}. \quad (2)$$

易知②式右端级数的收敛半径为1, 从而, 当 $t \in (-1, 1)$ 时, 可逐项求导, 有

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2n-1)(2t)^{2n-2}.$$

由计算知

$$\begin{aligned} &(1+t^2)g'(t) + t \cdot g(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot 2n(2n-1)(2t)^{2n-2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{2} n(2n-1)(2t)^{2n} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot \frac{n}{2} (2t)^{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2n-1)(2t)^{2n-2} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n^2 (2t)^{2n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} 2(n+1)(2n+1)(2t)^{2n} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n^2 (2t)^{2n} = 1, t \in (-1, 1),
\end{aligned}$$

即 $\sqrt{1+t^2} g'(t) + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, t \in (-1, 1).$

对上式两边求积有

$$\sqrt{1+t^2} g(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + c, t \in (-1, 1).$$

由 $g(0) = 0$, 知 $c = 0$, 因此

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ln(t + \sqrt{1+t^2}), t \in (-1, 1).$$

又 $G(t) = \frac{1}{1+t^2} [1 - t \cdot g(t)], t \in (0, 1),$

将 $t = \frac{\sqrt{-x}}{2} = \frac{\sqrt{|x|}}{2}$, 代入上式有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \\
&= \frac{4}{4-x} - \frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{|x|} + \sqrt{4-x}}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$x \in (-4, 0).$$

【3030】 $\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots$

解 由题意 x 不等于负整数,

令 $u_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}, n = 1, 2, 3, \cdots,$

现研究 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性及其和.

我们知道当 $x \neq 1$ 时

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1} &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) \\
&= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x-1} \\
&= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \left(\frac{x+2}{x-1} \right) \\
&= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \\
&\quad + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \cdot \frac{3}{x-1} \\
&= \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} \\
&\quad + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\
&\quad + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} \cdot \frac{4}{x-1} \\
&= \dots \\
&= \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} \\
&\quad + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\
&\quad + \dots + \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \\
&\quad + \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \cdot \frac{n+1}{x-1} \\
&= u_1 + u_2 + \dots + u_n + R_n, \tag{①}
\end{aligned}$$

其中
$$\begin{aligned}
R_n &= u_n \cdot \frac{n+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{x+k} \\
&= \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}} = \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n (1+\alpha_k),
\end{aligned}$$

这里(当 k 充分大时)

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1 + \frac{1}{k}}{1 + \frac{x}{k}} - 1 = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} - 1 \\ &= \frac{1-x}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).\end{aligned}\quad (2)$$

由①式知,只要研究 R_n 有无极限即可.

$$\text{令 } v_n = \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k),$$

分两种情形来讨论:

1° $x > 1$ 时,此时

$$0 < 1 + \alpha_k = \frac{k+1}{x+k} < 1, k = 1, 2, \dots,$$

$$\text{于是 } \ln v_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \alpha_k), \ln(1 + \alpha_k) < 0,$$

$$\alpha_k < 0, k = 1, 2, 3, \dots, \alpha_k \rightarrow 0. \quad (3)$$

由②和③式及 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散知

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 发散, 且 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = -\infty$. 于是, 由

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \alpha_k)}{\alpha_k} = 1$$

知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k)$ 发散, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k) = -\infty,$$

因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln v_n = -\infty$,

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

于是由①有

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-1} - R_n \right) = \frac{1}{x-1}.$$

2° $x < 1$ 时, x 不是负整数, 又 $x = 0$ 时, 原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty} 1$, 发散. 故可设 $-m < x < -m+1$, m 为某非负整数, 于是

$$1 + \alpha_k = \frac{k+1}{x+k} < 0, k = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$1 + \alpha_k = \frac{k+1}{x+k} > 0, k = m, m+1, \dots.$$

$$\text{令 } S_n = \prod_{k=m}^n (1 + \alpha_k), n = m, m+1, \dots,$$

$$\text{则 } \ln S_n = \sum_{k=m}^n \ln(1 + \alpha_k), n = m, m+1, \dots.$$

由 ② 知, 当 k 充分大时, $\alpha_k > 0$, 且级数 $\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k$ 发散.

类似于 1° 知 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k)$ 发散, 且

$$\sum_{k=m}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k) = +\infty,$$

$$\text{因而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln S_n = +\infty,$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty.$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \pm \infty.$$

其中的正负号随 m 是 $2, 4, 6, \dots$ 之一或 $0, 1, 3, 5, \dots$ 之一而定, 因

此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

3° $x = 1$ 时, 原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$, 发散.

综上所述, 原级数在 $x > 1$ 时收敛, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{1}{x-1}.$$

【3031】 $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots$, 在 $x > 0, a_n > 0$ (n

$= 1, 2, \dots$) 条件下, 其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 为发散级数.

解 令

$$S_n = \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdots \frac{a_n}{a_{n+1}+x}, n=1,2,3,\cdots.$$

由 $x > 0, a_n > 0$ 我们有

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{x} &= \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2+x}{x} = \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{x} \\ &= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdot \frac{a_3}{x} \\ &= \cdots \\ &= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \cdots \\ &\quad + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n+x} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}+x} \\ &\quad + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n+x} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}+x} \cdot \frac{a_{n+1}}{x} \\ &= \sum_{k=1}^n S_k + R_n, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{a_{n+1}}{x} \cdot S_n \\ &= \frac{a_1}{x} \cdot \frac{a_2}{a_2+x} \cdot \frac{a_3}{a_3+x} \cdots \frac{a_n}{a_n+x} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+x} \\ &= \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{a_k+x} = \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{x}{a_k+x}\right) \\ &= \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} (1 + \alpha_k), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\alpha_k = -\frac{x}{a_k+x}, k=2,3,\cdots,n+1, \quad (3)$$

由 (1) 知, 只要研究 R_n 有关极限.

因为 $-1 < \alpha_k < 0, 0 < 1 + \alpha_k < 1, k=2,3,\cdots,$

$$\text{令 } u_n = \prod_{k=2}^{n+1} (1 + \alpha_k),$$

$$\text{则 } \ln u_n = \sum_{k=2}^{n+1} \ln(1 + \alpha_k),$$

我们知道 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 是发散的, 事实上, 由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 的发散性.

1° 若

$$a_k \geq x, k = 2, 3, \dots,$$

则

$$a_k + x \leq 2a_k,$$

即

$$\frac{1}{a_k + x} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_k}.$$

由 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 发散(无界)知 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 发散.

2° 若除有限个 a_k 之外均有 $a_k \geq x$, 则仍有上述结论.

3° 若 $\exists \{a_{k_i}\}$, 使 $a_{k_i} < x, i = 1, 2, 3, \dots$, 则我们有

$$a_{k_i} + x < 2x,$$

即

$$\frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{1}{2x}, (i = 1, 2, \dots).$$

显然有

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{N}{2x} \rightarrow +\infty, (N \rightarrow \infty).$$

于是级数 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 发散.

故 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x} = +\infty, \sum_{k=2}^{\infty} a_k = -\infty.$

又 $-1 < a_k < 0, \ln(1 + a_k) < a_k < 0, k = 2, 3, \dots,$

知 $\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 + a_k) = -\infty.$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln u_n = -\infty, u_n \rightarrow 0, R_n \rightarrow 0.$

于是原级数收敛, 且

$$\frac{a_1}{a_2 + x} + \frac{a_1}{a_2 + x} \cdot \frac{a_2}{a_3 + x} + \dots = \frac{a_1}{x}.$$

【3032】 若(1) $|x| < 1$; (2) $|x| > 1$

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots.$$

解 令

$$S_n = \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}}, n = 0, 1, 2, \dots, |x| \neq 1.$$

当 $|x| \neq 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} &= \frac{x}{1-x^2}(1+x) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4}(1+x^2) \\ &= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^4} = \dots \\ &= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \dots + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} + \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}} \\ &= S_1 + S_2 + \dots + S_n + R_n, \end{aligned}$$

其中 $R_n = \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}},$

(1) 当 $|x| < 1$ 时, 显然

$$R_n = \frac{|x|^{2^{n+1}}}{1-|x|^{2^{n+1}}} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty).$$

于是有 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N S_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} - R_N \right) = \frac{x}{1-x}.$

(2) 当 $|x| > 1$ 时, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|x|} \right)^{2^{n+1}} = 0,$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|x|^{2^{n+1}}}{1-|x|^{2^{n+1}}} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{|x|} \right)^{2^{n+1}} - 1} \right\} = 1.$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N S_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} - R_N \right)$

$$= \frac{x}{1-x} + 1 = \frac{1}{1-x}.$$

【3033】 若(1) $|x| < 1$; (2) $|x| > 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}.$$

解 令

$$v_n = \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}, n = 1, 2, \dots, |x| \neq 1.$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}} &= \frac{x^n(1-x)}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \\ &= \frac{1-x}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1-x}{x} v_n, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{1-x}{x} v_k &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{1-x^{k+1}} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{N+1}}, \end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=1}^N v_n = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^{N+1}}.$$

(1) 当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} v_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N v_k = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^{N+1}} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} = \frac{x^2}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

(2) 当 $|x| > 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} v_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N v_k = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{N+1}-1} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

§ 8. 用级数求解定积分

用级数的被积函数展开式计算以下积分(3034 ~ 3040).

【3034】 $\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx.$

解 $\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx = -\int_0^1 \ln(1-x) dx$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^1 \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \right) dx \\
&= \int_0^1 x dx + \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{3} dx + \cdots \\
&= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1.
\end{aligned}$$

注意: 因为 $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$, 当 $x=1$ 时发散, 于是在 $[0, 1]$ 上逐项积分的合理性需要证明.

任意 $\tau \in (0, 1)$,

有
$$\int_0^\tau \ln(1-x) dx = \int_0^\tau \left(-x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} \right) dx + R_n, \quad (1)$$

其中
$$R_n = \int_0^\tau \left(-\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} - \cdots \right) dx.$$

因为 $0 < \tau < 1$, 因而在 $[0, \tau]$ 上逐项积分是合理的

又
$$\begin{aligned}
0 > R_n &= - \left[\frac{\tau^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{\tau^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right] \\
&> - \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right] \\
&= - \left[\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \cdots \right] \\
&= -\frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

于是由 ① 式有

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^\tau \ln(1-x) dx - \left(-\frac{\tau^2}{1 \cdot 2} - \frac{\tau^3}{2 \cdot 3} - \cdots - \frac{\tau^{n+1}}{n(n+1)} \right) \right| \\
&< \frac{1}{n+1}. \quad (2)
\end{aligned}$$

在 ② 中, n 固定, 令 $\tau \rightarrow 1^-$ (广义积分 $\int_0^1 \ln(1-x) dx$ 收敛) 有

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 \ln(1-x) dx - \left(-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \cdots - \frac{1}{n(n+1)} \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{于是} \quad \int_0^1 \ln(1-x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \cdots - \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ &= -\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{因而} \quad \int_0^1 \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \cdots \right) dx \\ = \int_0^1 (-x) dx + \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(-\frac{x^3}{2} \right) dx + \cdots\end{aligned}$$

也就是逐项积分公式成立.

本节下面的各题,凡在端点发散的级数的逐项积分合理性问题,都可类似地证明,不再一一列出.

$$\text{【3035】} \quad \int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx.$$

解 由 2871 题结论有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx \\ = \int_0^1 \frac{x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right\}}{x} dx \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

$$\text{【3036】} \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

解 由 2961 题结论有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx &= \int_0^1 \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots}{x} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots \right) dx \\ &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

$$\text{【3037】} \quad \int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx \quad (p > 0, q > 0).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx \\
 &= \int_0^1 x^{p-1} \left(-x^q - \frac{x^{2q}}{2} - \frac{x^{3q}}{3} - \cdots \right) dx \\
 &= - \int_0^1 \left(x^{p-1+q} + \frac{1}{2} x^{p+2q-1} + \frac{1}{3} x^{p+3q-1} + \cdots \right) dx \\
 &= - \left(\frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+2q} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{p+3q} \cdot \frac{1}{3} + \cdots \right) \\
 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+nq)}.
 \end{aligned}$$

$$\text{【3038】} \quad \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx = - \int_0^1 \ln x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) dx \\
 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \ln x \Big|_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)^2} \Big|_0^1 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\
 &= 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}.
 \end{aligned}$$

$$\text{【3039】} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1} = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-2\pi x} (1 + e^{-2\pi x} + e^{-4\pi x} + \cdots) dx \\
 &= \left[-\frac{x}{2\pi} e^{-2\pi x} - \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-2\pi x} \right] \Big|_0^{+\infty} \\
 &\quad + \left[-\frac{x}{4\pi} e^{-4\pi x} - \frac{1}{(4\pi)^2} e^{-4\pi x} \right] \Big|_0^{+\infty} \\
 &\quad + \left[-\frac{x}{6\pi} e^{-6\pi x} - \frac{1}{(6\pi)^2} e^{-6\pi x} \right] \Big|_0^{+\infty} + \cdots \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{24}.$$

【3040】 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1}.$

解 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x} dx}{1 + e^{-x}}$

$$= \int_0^{+\infty} x e^{-x} (1 - e^{-x} + e^{-2x} - \cdots) dx$$

$$= \left[-x e^{-x} - e^{-x} \right] \Big|_0^{+\infty} - \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{2^2} e^{-2x} \right] \Big|_0^{+\infty}$$

$$+ \left[-\frac{x}{3} e^{-3x} - \frac{1}{3^2} e^{-3x} \right] \Big|_0^{+\infty} - \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

【3041】 按照模 $k (0 \leq k < 1)$ 的正整数幂展开第一型完全椭圆积分:

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

解 $F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \varphi + \frac{5}{16} k^6 \sin^6 \varphi + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi + \cdots \right) d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \right\}, (2281 \text{ 题结论}).$$

【3042】 按照模 $k (0 \leq k < 1)$ 的正整数幂展开第二型完全椭圆积分:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

解 $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi \right\} d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\}.
\end{aligned}$$

【3043】 用按照离心率正整数幂展开的级数来表示下列椭圆的弧长:

$$x = a \cos t, y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

解 设 $a > b$, 则

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - e^2.$$

$$\begin{aligned}
\text{弧长为 } S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\
&= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt \\
&= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} e^{2n} \cos^{2n} t \right\} dt \\
&= 4a \cdot \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{e^{2n}}{2n-1} \right\} \\
&= 2\pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{e^4}{3} - \dots \right\}.
\end{aligned}$$

证明下列等式(3044 ~ 3046).

$$\text{【3044】} \int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

$$\begin{aligned}
\text{证 } \int_0^1 \frac{dx}{x^x} &= \int_0^1 e^{-x \ln x} dx \\
&= \int_0^1 \left(1 - x \ln x + \frac{1}{2!} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{3!} x^3 \ln^3 x + \dots \right) dx \\
&= \left[x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2! \cdot 3} \ln^2 x - \frac{x^3}{3^2} \ln x + \frac{x^3}{3^3} - \frac{x^4}{3! \cdot 4} \ln^3 x \right. \\
&\quad \left. + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2} \ln^2 - \frac{x^4}{4^3} \ln x + \frac{x^4}{4^4} + \dots \right] \Big|_0^1 \\
&= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.
\end{aligned}$$

$$\text{【3045】} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax \, dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad & \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax \, dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n+1} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-t} [t^n + n t^{n-1} + n(n-1)t^{n-2} \\ &\quad + \cdots + n!t + n!] \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}. \end{aligned}$$

$$\text{【3046】} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \, dx = \frac{\pi}{n!}, (n = 0, 1, 2, \dots).$$

证 令 $z = u + iv$, 记 $R(z) = u$ 为实部, 于是

$$\operatorname{Re}(e^{iz}) = e^{\cos x} \cos(\sin x).$$

故

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \, dx \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{iz} \cos nx \, dx \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{iz} \cdot \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) \, dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(e^{iz})^m}{m!} (e^{inx} + e^{-inx}) \, dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{1}{m_1!} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{i(m_1+n)x} \, dx \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{1}{m_2!} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{i(m_2-n)x} \, dx \right\} \right]. \end{aligned}$$

又任 $k \in \mathbb{Z}$, 有

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

于是, 当 $n \geq 0, m \geq 0$ 时,

1° 当 $m = 0$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

相应地有 $I_0 = \frac{1}{2}(2\pi + 2\pi) = 2\pi$.

2° 当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x} dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

于是相应地有

$$I_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n!} 2\pi \right) = \frac{\pi}{n!}.$$

求解(3047 ~ 3050).

【3047】 $\int_0^{2\pi} e^{a \cos x} \cos(asin x - nx) dx, (n \text{ 为自然数}).$

解 被积函数是 $e^{ae^{ix} - inx}$ 的实部, 即

$$\operatorname{Re}\{e^{ae^{ix} - inx}\} dx = e^{a \cos x} \cos(asin x - nx) dx,$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} e^{a \cos x} \cos(asin x - nx) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\{e^{ae^{ix} - inx}\} dx = \operatorname{Re}\left\{\int_0^{2\pi} e^{ae^{ix}} e^{-inx} dx\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ae^{ix})^m}{m!} e^{-inx} dx\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx\right\} \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ \frac{a^n}{n!} \cdot 2\pi + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx \right\} = \frac{2\pi a^n}{n!}.$$

【3048】 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin \alpha}{1 - 2a \cos x + a^2} dx.$

解 由 2864 题结论有

$$\frac{x \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} x \sin nx, \quad |\alpha| < 1,$$

又 $\int_0^{\pi} x \sin nx dx = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{n},$

所以, 当 $|\alpha| < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 - 2a \cos x + a^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a^{n-1} \frac{\pi}{n} \\ &= \frac{\pi}{a} \ln(1 + a). \end{aligned}$$

当 $|\alpha| > 1$ 时, $\left| \frac{1}{\alpha} \right| < 1,$

$$\frac{x \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x \sin x}{1 - 2\left(\frac{1}{a}\right) \cos x + \left(\frac{1}{a}\right)^2},$$

于是当 $|\alpha| > 1$ 时,

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx = \frac{\pi}{a} \ln \left(1 + \frac{1}{a} \right).$$

【3049】 $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$

解 由 2872 题结论知, 当 $|\alpha| \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{a^n \cos nx}{n} dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

当 $|\alpha| > 1$, 即当 $\left| \frac{1}{a} \right| < 1$ 时,

$$\ln(1 - 2a \cos x + a^2) = \ln \left[a^2 \left(1 - 2 \frac{1}{a} \cos x + \frac{1}{a^2} \right) \right]$$

$$= \ln \alpha^2 + \ln \left(1 - \frac{2}{\alpha} \cos \alpha + \frac{1}{\alpha^2} \right),$$

于是当 $|\alpha| > 1$ 时,

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \pi \ln \alpha^2 = 2\pi \ln |\alpha|.$$

【3050】 证明公式:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{a+x} dx &= \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} \\ &\quad + (-1)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $a > 0$ 与 $0 < \theta_n < 1$.

若在公式 (1) 中取两项来表示积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx$$

其精确度是多少?

证 当 $x \geq 0$ 时, 令 $f(x) = \frac{1}{x+a}$, 在 $x=0$ 的泰勒公式是

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+a} \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \\ &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} \\ &\quad + (-1)^n \frac{1}{(a+\theta x)^{n+1}} x^n \\ &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} \\ &\quad + (-1)^n \frac{x^n}{a^{n+1}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \theta \cdot \frac{x}{a}\right)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} \end{aligned}$$

$$+(-1)^n \bar{\theta}_n(x) \frac{x^n}{a^{n+1}},$$

其中 $0 < \theta < 1, \bar{\theta}_n(x) = \frac{1}{\left(1 + \theta \frac{x}{a}\right)^{n+1}}.$

于是 $0 < \bar{\theta}_n(x) < 1, x \in (0, \infty).$

由 $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!, n = 0, 1, 2, \dots,$

及 $0 < \int_0^{+\infty} e^{-x} \bar{\theta}_n(x) x^n dx < \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!,$

知 $\int_0^{+\infty} e^{-x} \bar{\theta}_n(x) x^n dx = \theta_n n!,$ 其中 $\theta_n \in (0, 1).$

从而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{a^k} \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x} dx \\ &\quad + (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^{+\infty} \theta_n(x) x^n e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} \\ &\quad + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}} \theta_n, \end{aligned}$$

在上述公式中, 令 $a = 100 = 10^2$, 有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx &= 10^{-2} - 1!10^{-4} + 2!10^{-6} - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} (n-1)!10^{-2n} \\ &\quad + (-1)^n \theta_n n!10^{-2n-2}, 0 < \theta_n < 1. \end{aligned}$$

令 $n = 2$, 则误差为 $(-1)^2 \theta_2 2!10^{-6}$, 其绝对值小于 $2 \cdot 10^{-6}$, 于是

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx - 0.01 + 0.0001 \right| \\ &\leq 0.000002 = 2 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

§ 9. 无穷乘积

1. 无穷乘积的收敛性 若存在有穷的非零极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{\infty} p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P,$$

则无穷乘积

$$p_1 p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n, \quad (1)$$

称为是收敛的.

若 $P = 0$ 而乘数 p_n 中没有一个等于零, 则乘积 (1) 称为是发散于零, 反之则称为收敛于零.

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$ 是收敛的必要条件.

乘积 (1) 的收敛等价于以下级数的收敛:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n, \quad (2)$$

若 $p_n = 1 + \alpha_n$ ($n = 1, 2, \cdots$) 与 α_n 不改变符号, 则对于乘积 (1) 收敛充要级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1), \quad (3)$$

收敛

通常, 当 α_n 不保持固定的符号而级数 (3) 收敛时, 乘积 (1) 将与以下级数同时收敛或发散到零:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2.$$

2. 绝对收敛 乘积 (1) 称为绝对或条件(非绝对)收敛取决于级数 (2) 是绝对收敛还是有条件收敛. 级数 (3) 绝对收敛是乘积 (1) 绝对收敛的充要条件.

3. 函数的无穷乘积展开 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 以下展开式成立:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right),$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right]$$

特别是由第一式当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, 得出沃利斯公式:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

证明以下等式(3051 ~ 3060).

【3051】 $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$

证 令

$$p_n = 1 - \frac{1}{n^2},$$

由部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{i=2}^n p_i = \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}, \end{aligned}$$

于是 $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$

【3052】 $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}.$

证 令

$$p_n = \frac{n^3-1}{n^3+1},$$

而
$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{i=2}^n p_i = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \frac{n^3-1}{n^3+1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}, \end{aligned}$$

于是 $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{2}{3}.$

【3053】 $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{3}.$

证 令

$$p_n = 1 - \frac{2}{n(n+1)},$$

$$\begin{aligned} \text{由 } P_n &= \prod_{i=2}^{\infty} p_i = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n}, \end{aligned}$$

$$\text{有 } \prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n-1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{3}.$$

$$\text{【3054】 } \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \right] = 2.$$

证 由

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2} \right) P_n &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

$$\text{有 } P_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}},$$

$$\text{于是 } \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \right) = 2.$$

$$\text{【3055】 } \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$$

证 由

$$\begin{aligned} P_n &= \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \left(\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}, \end{aligned}$$

有
$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

【3056】
$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$$

证 当 $x \neq 0$ 时,

$$P_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sin x}{x},$$

于是
$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$$

【3057】
$$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

证 由

$$P_n = \operatorname{ch} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2^2} \cdots \operatorname{ch} \frac{x}{2^n}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{2^n \operatorname{sh} \frac{x}{2^n}} = \frac{\operatorname{sh} x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2^n}}, (x \neq 0).$$

又
$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{sh} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{ch} y} = 1. \text{ 故}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh} x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2^n}} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

【3058】
$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

证 由

$$\begin{aligned}(1-x)P_n &= (1-x)(1+x)\cdots(1+x^{2^n}) \\ &= 1-x^{2^{n+1}},\end{aligned}$$

有 $P_n = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$

又 $|x| < 1$, 我们有

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x},$$

由此, 我们有

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

【3059】 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$

证 在 3056 题中, 令 $x = \frac{\pi}{2}$, 由半角公式有

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \dots,$$

于是 $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots,$

即 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$

【3060】 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

证 由 $\sin x$ 无穷乘积展开

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right),$$

令 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, 我们有

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(3n)^2}\right) = \frac{\pi}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)^2},$$

于是
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

证明以下无穷乘积的收敛性并确定其数值(3061 ~ 3064).

【3061】
$$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}.$$

证 由

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 6} \cdots \frac{(n-4)n}{(n-3)(n-1)} \\ &\quad \cdot \frac{(n-3)(n+1)}{(n-2)n} \cdot \frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)} \\ &= \frac{n+2}{4(n-1)}, \end{aligned}$$

有
$$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1} = \frac{1}{4},$$

收敛.

【3062】
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right].$$

证 由

$$1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)},$$

有

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(n-1)^2}{(n-2)n} \\ &\quad \cdot \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= \frac{2(n+1)}{n+2}, \end{aligned}$$

于是
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 2.$$

从而该无穷乘积收敛,且其值为 2.

【3063】
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}.$$

证 由

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 7} \cdot \frac{5 \cdot 11}{7 \cdot 9} \cdot \frac{7 \cdot 13}{9 \cdot 11} \cdots \frac{(2n-3)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)} \\ &\quad \cdot \frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)} \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{2n+7}{2n+3}, \end{aligned}$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{3}{7}.$

于是该无穷乘积收敛, 且其值为 $\frac{3}{7}.$

【3064】 $\prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}}, (a > 0).$

证 由

$$P_n = a^{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdots a^{\frac{(-1)^n}{n}} = a^{-(1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n})},$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = a^{-\ln 2}.$

于是该无穷乘积收敛, 且其值为 $a^{-\ln 2}.$

【3065】 能否由乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 的收敛性得出下列乘积的收敛性?

(1) $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n);$ (2) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2;$ (3) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n;$ (4) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}.$

证 (1) 不可以, 如 $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 皆收敛, 但

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right] = \sum_{n=2}^{\infty} 2,$$

发散.

(2) 可以, 事实上, 部分乘积

$$Q_n = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdots p_n^2 = (p_1 \cdots p_n)^2,$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_1 \cdots p_n)^2 = P^2,$

其中 $P = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \neq 0.$

(3) 可以,事实上,部分乘积

$$A_n = (p_1 p_2 \cdots p_n)(q_1 q_2 \cdots q_n),$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = PQ,$

其中 $P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n, \prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0.$

(4) 可以,事实上,部分乘积

$$A_n = \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n}, (q_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots),$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{P}{Q},$

其中 $P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \neq 0, \prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0.$

研究以下无穷乘积的收敛性(3066 ~ 3085)

【3066】 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$

解 令 $p_n = \frac{1}{n},$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0.$

于是不满足收敛的必要条件,又

$$P_n = \frac{1}{n!},$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0.$

所以该无穷乘积发散于零.

【3067】 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$

解 令

$$p_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)},$$

于是 $p_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)},$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 收敛,且 $\frac{1}{n(n+2)}$ 不变号,因而该无穷乘积收敛.

$$\text{【3068】} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right).$$

$$\text{解} \quad \text{令 } p_n = 1 + \frac{1}{n^p},$$

其中 $\frac{1}{n^p}$ 不变号, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散, 于是该无穷乘积在 $p > 1$ 时收敛, 在 $p \leq 1$ 时发散.

$$\text{【3069】} \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$$\text{解} \quad \text{令 } p_n = 1 - \frac{1}{n},$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$ 发散, 且 $-\frac{1}{n}$ 不变号, 故该无穷乘积发散.

注: 因

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0,$

于是, 该无穷级数发散于零.

$$\text{【3070】} \prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p.$$

解 令

$$p_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p = \left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right)^p,$$

由

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right)^p = p \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right),$$

对任何 p 皆收敛, 于是该无穷乘积, 对任何 p 皆收敛.

$$\text{【3071】} \prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{n^2 + a_1 n + b_1}{n^2 + a n + b}, \text{ 其中当 } n \geq n_0 \text{ 时, } n^2 + a n + b > 0.$$

解 令

$$p_n = \frac{n^2 + a_1 n + b_1}{n^2 + a n + b} = 1 + \frac{(a_1 - a)n + (b_1 - b)}{n^2 + a n + b},$$

于是可令 $\alpha_n = \frac{(a_1 - a)n + (b_1 - b)}{n^2 + an + b}$, 当 $a_1 = a$ 时, $\alpha_n \sim \frac{1}{n^2}$, 由 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛知, 该无穷乘积收敛, 当 $a_1 \neq a$ 时, 由 $n^2 + an + b > 0$, 且 $\alpha_n \sim \frac{a_1 - a}{n}$, 知该无穷乘积发散.

$$\text{【3072】} \quad \prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)}$$

其中 $n_0 > b_i (i = 1, 2, \cdots, p)$.

解 令

$$p_n = \frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)},$$

$$\text{于是 } p_n = 1 + \frac{(\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i)n^{p-1} + \cdots + (-1)^p (\prod_{i=1}^p a_i - \prod_{i=1}^p b_i)}{\prod_{i=1}^p (n-b_i)},$$

$$\text{令 } \alpha_n = \frac{(\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i)n^{p-1} + \cdots + (-1)^p (\prod_{i=1}^p a_i - \prod_{i=1}^p b_i)}{\prod_{i=1}^p (n-b_i)},$$

当 $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^p b_i$ 时, $\alpha_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)$, 从而该无穷乘积收敛.

当 $\sum_{i=1}^p a_i \neq \sum_{i=1}^p b_i$ 时, 由当 $n > n_0$ 时,

$$\prod_{i=1}^p (n-b_i) > 0,$$

且 $\alpha_n \sim \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^p (b_i - a_i) \right),$

于是 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n$ 发散, 从而该无穷乘积发散.

$$\text{【3073】} \quad \prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}.$$

解 令 $p_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$,

有 $\ln p_n = \frac{1}{2} \ln \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$,

由 $\sum_{n=0}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$ 发散, 于是原无穷乘积发散.

【3074】 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

解 令

$$p_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}},$$

有 $\ln p_n = -\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$,

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 从而该无穷乘积收敛.

【3075】 $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

解 令 $p_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$,

于是 $\ln p_n = \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$.

又 $\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$,

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛. 因此, 该无穷乘积也收敛.

【3076】 $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$.

解 令 $p_n = \sqrt[n^2]{n}$,

于是 $\ln p_n = \frac{1}{n^2} \ln n$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln n$,

而 $\frac{1}{n^2} \ln n = O\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right)$,

这里 $\epsilon \in (0, 1)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ 收敛, 于是该无穷乘积收敛.

【3077】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$.

解 令 $p_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$,

于是 $p_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left[1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$
 $= 1 - \frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

现记 $p_n = 1 + \alpha_n$,

其中 $\alpha_n = -\frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

当 n 充分大时, 有 $\alpha_n < 0$, 保持不变号, 又任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \left[-\frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$ 收敛, (n_0 为适当大的正数), 从

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛, 因此该无穷乘积收敛.

【3078】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{\frac{x}{c+n}}$, 其中 $c > 0$.

解 任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$,

令 $p_n = \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{\frac{x}{c+n}}$
 $= \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) \left[1 + \frac{x}{c+n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$
 $= 1 - \frac{x}{c+n} + \frac{x}{c+n} - \frac{x^2}{n(c+n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$= 1 - \frac{x^2 - cx}{n(c+n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

于是可设 $p_n = 1 + \alpha_n$,

其中 $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$$\text{由 } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

收敛知,该无穷乘积收敛.

$$\text{【3079】 } \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$$

解 当 $|x| \geq 1$ 时,

$$p_n = 1 - x^n \nrightarrow 1,$$

于是该无穷乘积发散,当 $|x| < 1$ 时,若 $x = 0$,显然收敛,若 $x \neq 0$,则有

$$\ln p_n = \ln(1 - x^n) = -x^n \ln[(1 - x^n)^{-\frac{1}{x^n}}],$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln[(1 - x^n)^{-\frac{1}{x^n}}] = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right] = 1,$$

$$\text{其中 } y = -\frac{1}{x^n}.$$

$$\text{于是 } \ln p_n = O(|x|^n).$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ ($|x| < 1$) 收敛,于是当 $|x| < 1$ 时该无穷乘积收敛.

$$\text{【3080】 } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right).$$

解 当 $|x| \geq 2$ 时,

$$p_n = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n \nrightarrow 1,$$

于是该无穷乘积发散,当 $|x| < 2$ 时,若 $x = 0$,显然收敛,若 $x \neq 0$,由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right)^{\left(\frac{2}{x}\right)^n} \xrightarrow{\text{令 } t = \left(\frac{x}{2}\right)^n} \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

$$\begin{aligned}\text{有} \quad \ln p_n &= \ln \left(1 + \left(\frac{x}{2} \right)^n \right) \\ &= \frac{x^n}{2^n} \ln \left(1 + \frac{x^n}{2^n} \right)^{\left(\frac{2}{x} \right)^n} = O \left(\left| \frac{x}{2} \right|^n \right).\end{aligned}$$

而当 $|x| < 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{2} \right|^n$ 收敛, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 故该无穷乘积收敛.

$$\text{【3081】} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}}{x^n} \right].$$

解 1° 当 $|x| < e$ 时, 由

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e + O(1),$$

则存在 $n_0 > 0$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n > |x|.$$

$$\text{于是有} \quad \left| \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}}{x^n} \right| = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{x} \right]^n > 1.$$

$$\text{从而} \quad p_n = 1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}}{x^n} \nrightarrow 1, (n \rightarrow \infty).$$

于是该无穷乘积发散.

2° 当 $|x| = e$ 时, 由 70 题结论, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n > e - \frac{3}{n}.$$

$$\begin{aligned}\text{此时} \quad p_n &= 1 + (\operatorname{sgn} x)^n \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}}{e^n} \\ &= 1 + (\operatorname{sgn} x)^n \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{e} \right]^n \\ &= 1 + a_n,\end{aligned}$$

其中 $\alpha_n = (\operatorname{sgn} x)^n \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n$.

又
$$\begin{aligned} |\alpha_n| &= \left| (\operatorname{sgn} x)^n \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n \right| \\ &= \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n > \left[\frac{e - \frac{3}{n}}{e} \right]^n \\ &= \left(1 - \frac{3}{e} \cdot \frac{1}{n} \right)^n, \end{aligned}$$

且
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{e} \cdot \frac{1}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{3}{ne} \right)^{\frac{ne}{3}} \right]^{\frac{3}{e}} \\ &= e^{-\frac{3}{e}} > 0, \end{aligned}$$

于是 $\alpha_n \nrightarrow 0$, 从而 $p_n \nrightarrow 1$, 故该无穷乘积发散.

3° 当 $|x| > e$ 时, 令 $p_n = 1 + \alpha_n$, 现考察 α_n ,

由 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e + O(1), (n \rightarrow \infty)$,

存在 $n_0 > 0$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{2}(e + |x|).$$

记 $q = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x| + e}{|x|},$

于是 $0 < q < 1$.

而
$$\begin{aligned} |\alpha_n| &= \left| \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \right| = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{|x|} \right]^n \\ &< \left[\frac{\frac{1}{2}(e + |x|)}{|x|} \right]^n = q^n, \end{aligned}$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛, 因此该无穷乘积收敛.

【3082】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}} \right) e^{\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}}.$

解 令 $p_n = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}},$

于是
$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \left[1 + \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right] \\ &= \left[1 + \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right] \\ &\quad + \left[-\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right] \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right), \end{aligned}$$

令 $\alpha_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right),$

于是 $p_n = 1 + \alpha_n.$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛, 知该无穷乘积收敛.

【3083】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^q}.$

解 1° 当 $|x| < 1$ 时

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^q} = \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \left[1 + O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{x^n}{n^p} + O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right) + O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right) \\ &= 1 + O\left(\frac{x^n}{n^p}\right) + O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right). \end{aligned}$$

当 n 充分大时, 不论 p, q 为何值, 皆有

$$\frac{x^n}{n^p} = O(|x|^{\frac{n}{2}}), \quad \frac{x^{3n}}{n^{p+2q}} = O(|x|^{\frac{n}{2}}),$$

从而 $p_n = 1 + \alpha_n, \alpha_n = O(|x|^{\frac{n}{2}}).$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛 (因 $|x| < 1$), 于是 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛.

2° 当 $x = 1$ 时, 在 $p > 1, q > \frac{1}{2}$ 的情形下, 由

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \cos \frac{1}{n^q} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \left[1 - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{1}{n^p} - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right), \end{aligned}$$

令 $p_n = 1 + \alpha_n$,

其中 $\alpha_n = \frac{1}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right)$.

于是 $\sum \alpha_n$ 绝对收敛, 且

$$\alpha_n^2 = \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right) = \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right).$$

从而 $\sum \alpha_n^2$ 收敛, 故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛.

3° 当 $x = -1$ 时, 在 $p > \frac{1}{2}, q > \frac{1}{2}$ 的情形下, 由

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) \cos \frac{(-1)^n}{n^q} \\ &= \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right) \\ &= 1 + \frac{(-1)^n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right), \end{aligned}$$

令 $p_n = 1 + \beta_n$,

其中 $\beta_n = \frac{(-1)^n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right)$.

于是 $\ln p_n = \ln(1 + \beta_n) = \beta_n + O(\beta_n^2)$.

易知 $\sum \beta_n$ 收敛, 又

$$\begin{aligned}\beta_n^2 &= \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right) \\ &= \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),\end{aligned}$$

知 $\sum \beta_n^2$ 绝对收敛, 从而 $\sum \ln p_n$ 收敛, 因此, $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛.

【3084】
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right]^p.$$

解 由题意 $x \neq 0$, 令

$$p_n = (1 + \alpha_n)^p,$$

其中
$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{x}{n}} - 1 = \left[1 - \frac{x^2}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - 1 \\ &= -\frac{x^2}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

又
$$\ln p_n = p \ln(1 + \alpha_n) = p \ln \left[1 - \frac{x^2}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right],$$

由 2677 题知 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 故该无穷乘积收敛.

【3085】
$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n}.$$

解 令 $p_n = \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n}$,

由题意 $\ln(x+n) - \ln n \geq 0$,

于是 $x \geq 0$.

1° 当 $x = 0$ 时, 各项皆为零, 于是无穷乘积收敛于零.

2° 当 $x > 0$ 时, 由

$$\ln p_n = \frac{1}{n} \ln \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right),$$

知, 当 $n \geq \frac{x}{e-1}$ 时, 有

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq 1,$$

于是 $\ln\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq 0.$

又
$$\frac{-\frac{1}{n}\ln\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \ln \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)} \rightarrow +\infty,$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散知 $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\ln\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ 发散, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 发散, 因此该无穷乘积发散.

【3086】 证明: 若级数 $\prod_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛, 则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

证 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$p_n = \cos x_n = 1 + a_n,$$

其中 $\alpha_n = -\frac{1}{2}x_n^2 + O(x_n^2), \quad \alpha_n \leq 0,$

又
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{x_n^2}{2} + O(x_n^2)\right],$$

收敛, 于是 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

【3087】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛, 则乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_n\right) \left(|\alpha_n| < \frac{\pi}{4}\right) \text{ 收敛.}$$

证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0,$$

令 $p_n = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_n\right),$

有
$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1 + \tan \alpha_n}{1 - \tan \alpha_n} = (1 + \tan \alpha_n)(1 + \tan \alpha_n + \tan^2 \alpha_n + \cdots) \\ &= 1 + 2\tan \alpha_n + 2\tan^2 \alpha_n + \cdots \end{aligned}$$

$$= 1 + 2\alpha_n + o(\alpha_n).$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} [2\alpha_n + o(\alpha_n)]$ 收敛, 对于级数

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} [2\alpha_n + o(\alpha_n)]^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 4\alpha_n^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot o(\alpha_n) + \sum_{n=1}^{\infty} o^2(\alpha_n), \end{aligned} \quad ①$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leq \sum_{s=1}^{\infty} |\alpha_{i_s}| \cdot |\alpha_{k_s}|,$$

当 n 充分大时, 有

$$|\alpha_n \cdot o(\alpha_n)| \leq |\alpha_n|, \quad |o^2(\alpha_n)| \leq |\alpha_n|,$$

从而 $\sum \alpha_n^2, \sum \alpha_n \cdot o(\alpha_n), \sum o^2(\alpha_n)$ 皆收敛.

故级数 ① 收敛, 从而该无穷乘积收敛.

研究下列无穷乘积的绝对收敛与条件收敛 (3088 ~ 3097).

【3088】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right].$

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 条件收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \right]^2$ 收敛, 故该无穷乘积条件收敛.

【3089】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right].$

解 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 条件收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

发散. 因此, 该无穷乘积发散.

【3090】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right].$

解 当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 绝对收敛, 于是无穷乘积绝对收敛.

当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 收敛, 故该无穷乘积条件收敛.

当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 发散, 知该无穷乘积发散.

当 $p \leq 0$ 时, 因 $\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 不趋于零, 于是该无穷乘积发散.

【3091】 $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\ln n} \right].$

解 因为 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 条件收敛, 又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{n} = 0,$$

知存在 $n_0 > 0$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有 $\ln^2 n < n$, 于是 $\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$, 从而

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散, 于是该无穷乘积发散.

【3092】 $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$

解 令 $p_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n},$

有 $\ln p_n = \ln \left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \right],$

设 $u_k = \ln p_{2k} + \ln p_{2k+1}, k = 1, 2, 3, \dots.$

有
$$\begin{aligned} u_k &= \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2k} + 1} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2k+1} - 1} \right) \\ &= \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}{(\sqrt{2k} + 1)(\sqrt{2k+1} - 1)} \right] > 0. \end{aligned}$$

又
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}{(\sqrt{2k} + 1)(\sqrt{2k+1} - 1)} \right]^{\frac{(\sqrt{2k} + 1)(\sqrt{2k+1} - 1)}{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}} = 1.$$

于是
$$u_k = -\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)}$$

$$\cdot \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right]^{\frac{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}}$$

$$\sim -\left[\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right] \sim \frac{1}{2k},$$

$$(k \rightarrow \infty).$$

因而 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 发散, 故 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln p_n$ 发散, 由此, 该无穷乘积发散.

【3093】 $\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}.$

解 令 $p_n = n^{(-1)^n},$

则 $p_{2k} = (2k)^{(-1)^{2k}} = 2k \rightarrow \infty, (k \rightarrow \infty).$

于是 $p_n \nrightarrow 1$, 从而该无穷乘积发散.

【3094】 $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}.$

解 令 $p_n = \sqrt[n]{n^{(-1)^n}},$

有 $\ln p_n = \frac{1}{n} \ln n^{(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \ln n.$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 条件收敛, 于是该无穷乘积条件收敛.

【3095】 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right].$

解 令

$$p_n = 1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n},$$

有 $|\ln p_n| = \frac{1}{n} \left| \ln \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right] \right|^{\frac{n}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}} \sim \frac{1}{n},$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln p_n|$ 发散, 设

$$v_n = \ln p_n,$$

于是
$$v_{2k-1} = \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right],$$

$$v_{2k} = \ln \left[1 + \frac{(-1)^k}{2k} \right], k = 1, 2, 3, \dots.$$

令
$$a_k = v_{2k-1} + v_{2k},$$

我们有
$$\begin{aligned} a_k &= \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \frac{(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^{2k-1}}{2k(2k-1)} \right] \\ &= \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1} - 1}{2k(2k-1)} \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

于是
$$a_{2m-1} = 0, \quad a_{2m} = \ln \left[1 - \frac{2}{4m(4m-1)} \right],$$

$$m = 1, 2, 3, \dots.$$

从而 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 又 $v_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 有 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛, 因此, 该无穷乘积条件收敛.

【3096】
$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ &\times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots \end{aligned}$$

解 无穷乘积的收敛性与级数

$$\begin{aligned} &\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &+ \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

的敛散性一致, 于是我们只研究级数 (1) 的敛散性就够了, 现将级数 (1) 每三项依次加括号有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right) \right. \\ &\left. + \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

现考虑 (2) 的通项

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right) \\
&\quad + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right), \tag{③} \\
&= \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&\quad + \ln\left[1 - \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{4n+1}} + \frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}\right] \\
&= \ln\left\{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[1 - \frac{\sqrt{4n-1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{16n^2-1}}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ \frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}\right]\right\} \\
&= \ln\left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{4n-1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{16n^2-1}}\right. \\
&\quad \left.- \frac{\sqrt{4n-1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}\right. \\
&\quad \left.+ \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2-1}}\right] \\
&= \ln\left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2(\sqrt{n}+1)\left(\sqrt{1-\frac{1}{4n}} + \sqrt{1+\frac{1}{4n}}\right) - 1}{\sqrt{16n^2-1}}\right. \\
&\quad \left.+ \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2-1}}\right] \\
&= \ln\left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2(\sqrt{n}+1)\left[1 - \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1 + \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - 1}{\sqrt{16n^2-1}}\right. \\
&\quad \left.+ o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right] \\
&= \ln\left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2(\sqrt{n}+1)\left(2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1}{\sqrt{16n^2-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{16n^2-1}} - \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
&= \ln \left[1 - \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2-1} (\sqrt{16n^2-1} + 4n)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
&= \ln \left[1 - \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
&= \ln[1 + \alpha_n],
\end{aligned}$$

其中 $\alpha_n = -\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$

于是 $\alpha_n \rightarrow 0$, 且 n 充分大时有 $\alpha_n < 0$, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}$ 发散,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 发散, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$ 发散, 从而

原无穷乘积发散.

【3097】 $\left(1 + \frac{1}{1^a}\right) \left(1 - \frac{1}{2^a}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^a}\right) \left(1 + \frac{1}{4^a}\right)$
 $\times \left(1 - \frac{1}{5^a}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{6^a}\right) \cdots$

解 令

$$q_1 = 1 + \frac{1}{1^a}, q_2 = \left(1 - \frac{1}{2^a}\right)^2,$$

$$q_3 = 1 + \frac{1}{3^a}, q_4 = 1 + \frac{1}{4^a},$$

$$q_5 = \left(1 - \frac{1}{5^a}\right)^2, q_6 = 1 + \frac{1}{6^a}, \cdots$$

设 $q_n = 1 + \alpha_n$,

于是 $\alpha_1 = \frac{1}{1^a}, \alpha_2 = -\frac{2}{2^a} + \frac{1}{2^{2a}},$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3^a}, \alpha_4 = \frac{1}{4^a},$$

$$\alpha_5 = -\frac{2}{5^a} + \frac{1}{5^{2a}}, \alpha_6 = \frac{1}{6^a}, \dots,$$

1° 当 $a > 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| &= \frac{1}{1^a} + \left(\frac{2}{2^a} - \frac{1}{2^{2a}} \right) + \frac{1}{3^a} \\ &\quad + \frac{1}{4^a} + \left(\frac{2}{5^a} - \frac{1}{5^{2a}} \right) + \frac{1}{6^a} + \dots, \end{aligned} \quad ①$$

收敛, 于是 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 绝对收敛.

2° 当 $a \leq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \nrightarrow 1$, 于是 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 发散.

3° 当 $0 < a \leq 1$ 时, 将原无穷乘积改写为

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{1^a}\right) \left(1 - \frac{1}{2^a}\right) \left(1 - \frac{1}{2^a}\right) \left(1 + \frac{1}{3^a}\right) \left(1 + \frac{1}{4^a}\right) \left(1 - \frac{1}{5^a}\right) \cdot \\ &\left(1 - \frac{1}{5^a}\right) \left(1 + \frac{1}{6^a}\right) \left(1 + \frac{1}{7^a}\right) \left(1 - \frac{1}{8^a}\right) \left(1 - \frac{1}{8^a}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{9^a}\right) \dots \end{aligned}$$

我们令

$$p_1 = 1 + \frac{1}{1^a}, p_2 = 1 - \frac{1}{2^a}, p_3 = 1 - \frac{1}{2^a},$$

$$p_4 = 1 + \frac{1}{3^a}, p_5 = 1 + \frac{1}{4^a}, p_6 = 1 - \frac{1}{5^a},$$

$$p_7 = 1 - \frac{1}{5^a}, p_8 = 1 + \frac{1}{6^a}, p_9 = 1 + \frac{1}{7^a}, \dots$$

设 $p_n = 1 + \beta_n, n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\text{于是 } \beta_n = \begin{cases} \frac{1}{(1+3k)^a}, & n = 4k+1, \\ -\frac{1}{(2+3k)^a}, & n = 4k+2 \text{ 或 } n = 4k+3, \\ \frac{1}{(3+3k)^a}, & n = 4k+4, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

现考察如下级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(1+3k)^a} - 2 \frac{1}{(2+3k)^a} + \frac{1}{(3+3k)^a} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

的收敛性,其中

$$b_k = \frac{1}{(1+3k)^a} - \frac{2}{(2+3k)^a} + \frac{1}{(3+3k)^a}.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } b_k &= \left[\frac{1}{(1+3k)^a} - \frac{1}{(2+3k)^a} \right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{(2+3k)^a} - \frac{1}{(3+3k)^a} \right] \\ &= \frac{a}{(3k+1+\theta_1)^{a+1}} - \frac{a}{(3k+2+\theta_2)^{a+1}} \\ &= \frac{a(a+1)}{[3k+1+\theta(1+\theta_2-\theta_1)]^{a+2}} \cdot (1+\theta_2-\theta_1), \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, 0 < \theta < 1$. 显然, 令 $\delta = 1 + \theta_2 - \theta_1$, 有 $0 < \delta < 2$, 且

$$\theta(1+\theta_2-\theta_1) = \theta\delta \in (0, 2).$$

$$\text{因而 } 0 < b_k = \frac{a(a+1)}{(3k+1+\theta\delta)^{a+2}} \cdot \delta \leq \frac{2a(a+1)}{(3k+1)^{a+2}}.$$

由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^{a+2}}$ 的收敛性知 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ 收敛, 但

β_n 变号, 从而还需考察 $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$, 易知

$$\beta_n^2 = \begin{cases} \frac{1}{(1+3k)^{2a}}, & n = 4k+1, \\ \frac{1}{(2+3k)^{2a}}, & n = 4k+2 \text{ 或 } n = 4k+3, \\ \frac{1}{(3+3k)^{2a}}, & n = 4k+4, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\text{于是 } \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{9}{4}\right)^{2a}} < \beta_n^2 < \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}\right)^{2a}}, n = 1, 2, 3, \dots.$$

当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{9}{4}\right)^{2a}}$ 发散, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$ 发散, 因

此, $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散, 故 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 也发散.

当 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}\right)^{2a}}$ 收敛, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$ 收敛, 故

$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 因此, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 收敛, 又由 ① 式知 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 发散, 于是当 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 时, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 条件收敛.

【3098】 证明: 虽然级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots,$$

发散, 但是乘积

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots,$$

收敛.

证 设

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots \quad ①$$

的通项为 u_n , 则

$$u_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1}, u_{2k} = -\frac{1}{\sqrt{k+1}}, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{令 } a_k = u_{2k-1} + u_{2k} = \frac{1}{k+1},$$

显然 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散, 于是原级数 ① 发散, 设

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots, \quad ②$$

无穷乘积对应的级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

其中 $v_n = \ln(1 + u_n)$.

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$,

且
$$v_{2k-1} = \ln(1 + u_{2k-1}) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1}\right),$$

$$v_{2k} = \ln(1 + u_{2k}) = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right), k = 1, 2, \dots.$$

若设 $b_k = v_{2k-1} + v_{2k}$,

则
$$b_k = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$= \ln\left(1 - \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\right).$$

因此, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛. 从而, 无穷乘积 ② 收敛.

【3099】 证明: 虽然两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad \text{与} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$$

发散, 但是乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ 收敛, 式中

$$\alpha_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{若 } n = 2k-1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{若 } n = 2k, \end{cases}$$

证 设 $a_k = \alpha_{2k-1} + \alpha_{2k}$,

则
$$a_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, k = 1, 2, 3, \dots.$$

由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ 收敛, 而 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散, 于是 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

发散, 又设

$$b_k = \alpha_{2k-1}^2 + \alpha_{2k}^2,$$

有
$$b_k = \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{3}{k^2} + \frac{3}{k^2\sqrt{k}} + \frac{1}{k^3}\right)$$

$$= \frac{2}{k} + \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{3}{k^2} + \frac{2}{k^2\sqrt{k}} + \frac{1}{k^3}$$

$$= \frac{2}{k} + o\left(\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right).$$

因为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ 收敛, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}$ 发散, 我们有 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 发散, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ 发散.

设与无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ 对应的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$,

令 $v_n = \ln(1 + \alpha_n), n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} \text{设 } c_k &= v_{2k-1} + v_{2k} = \ln(1 + \alpha_{2k-1}) + \ln(1 + \alpha_{2k}) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) \\ &= \ln\left[1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right] = \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right), \end{aligned}$$

于是, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ln(1 + \alpha_n) = 0,$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 故原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ 收敛.

【3100】 设

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

(黎曼 ζ 函数), $p_n (n = 1, 2, \dots)$ 为素数的序列, 证明:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x).$$

解 当 $x > 1$ 时, 黎曼函数收敛, 于是我们设 $x > 1$, 有

$$\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \frac{1}{p_n^x} + \frac{1}{(p_n^2)^x} + \dots + \frac{1}{(p_n^m)^x} + \dots,$$

$$\text{又 } \prod_{p_n \leq N} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{n_1^x} + \frac{1}{n_2^x} + \dots,$$

其中, $N \in \mathbb{N}, n_1, n_2, \dots$ 是整数, 它不包含超过 N 的素因子, 显然 $1, 2, \dots, N$ 这种整数全被包含在 n_1, n_2, \dots 之中, 因此

$$\begin{aligned}
& \left| \zeta(x) - \prod_{p_n \leq N} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} \right| \\
&= \left| \zeta(x) - 1 - \frac{1}{n_1^x} - \frac{1}{n_2^x} - \dots \right| \\
&\leq \frac{1}{(N+1)^x} + \frac{1}{(N+2)^x} + \dots \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

取极限有 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x), (x > 1)$.

【3101】 证明: 乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ 发散(欧拉), 其中 $p_n (n = 1, 2, \dots)$ 为素数的序列.

证 因为

$$\prod_{p_n \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} > \sum_{n=1}^N \frac{1}{n},$$

当 $N \rightarrow +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ 发散, 于是 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ 发散, 且其值为 $+\infty$, 从而 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ 发散于零, 又 $\frac{1}{p_n} > 0$, 始终不变号, 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ 发散.

【3102】 令 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+C}}\right) (C > 0).$$

证明: $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

提示: 研究 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^p = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$.

解 今考察无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, 其中 $p_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$, 考察

它对应级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$, 而

$$\begin{aligned}
\ln p_n &= \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} + p \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= -\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} + p \left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\
&= -\ln(1 + \Delta_n) + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\Delta_n + O(\Delta_n^2) + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

其中 $\Delta_n = \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), (\varepsilon > 0).$

于是 $\ln p_n = -\frac{p}{n} + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛知, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 从而 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 记 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = k_0$, 从而 $k_0 \neq 0$, 且 k_0 为一有限正数, 设

$$P_N = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} p_n,$$

于是 $P_N \rightarrow a_1 k_0 > 0, \quad (N \rightarrow \infty).$

又由 $P_N = a_1 \prod_{n=1}^N \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = a_{N+1} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p,$

注意到 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \beta_n,$

其中 $\beta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

从而当 N 充分大时, 有

$$\begin{aligned}
&\ln \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \\
&= p \sum_{n \leq N} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = p \sum_{n \leq N} \left(\frac{1}{n} + \beta_n\right) \\
&= p \left[\ln N + C + O\left(\frac{1}{N}\right) + \sum_{n=1}^N \beta_n \right] \\
&= p \left[\ln N + C + B + O\left(\frac{1}{N}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$= p \left[\ln N + C_0 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right],$$

其中 C 为 Euler 数, $C > 0$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ 是一常数,

$$\sum_{n=1}^N \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n + O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) = B + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$C_0 = C + B,$$

故
$$\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = e^{p[\ln N + C_0 + O(\frac{1}{N})]} = N^p \cdot G_N,$$

其中
$$G_N = e^{C_0 p + O(\frac{1}{N})} \rightarrow e^{C_0 p} > 0, (N \rightarrow \infty).$$

于是
$$\begin{aligned} 0 < a_1 k_0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} P_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[a_{N+1} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [a_{N+1} N^p G_N] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p) \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} G_N. \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

上述运算是合理的,这是因为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G_N = e^{C_0 p} > 0,$$

而
$$a_{N+1} N^p = \frac{P_N}{G_N},$$

于是
$$\lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p) = \frac{a_1 k_0}{e^{C_0 p}}.$$

也就是①式各极限存在,同时 a_{N+1} 与 $\frac{1}{N^p}$ 为同级无穷小量或 a_N 与

$\frac{1}{(N+1)^p}$ 为同级无穷小量,又

$$\frac{1}{(N-1)^p} \sim \frac{1}{N^p},$$

于是 $a_N \sim \frac{1}{N^p}$, 即 N 充分大时,有

$$a_N = O\left(\frac{1}{N^p}\right).$$

【3103】 用沃利斯公式证明:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

证 由沃利斯公式

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2},$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$

于是 $\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \sim \frac{2}{\pi(2n+1)}.$

上式两端开方有

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

【3104】 证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 表达式

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

具有非零极限 A .

由此推导出斯特林公式:

$$n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \epsilon_n),$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0, A = \sqrt{2\pi}.$

提示: 未知极限表示成无穷乘积:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

利用沃利斯公式确定常数 A .

证 由题设有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

首先证明不等式

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}. \quad \textcircled{1}$$

事实上, 由于

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots \right),$$

于是令 $x = \frac{1}{2n+1}$, 有

$$\begin{aligned} \ln \frac{n+1}{n} &= \frac{2}{2n+1} \left[1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots \right], \end{aligned}$$

即
$$\begin{aligned} \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) &= 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots. \end{aligned}$$

上式右端大于 1, 小于

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots \right] &= 1 + \frac{1}{12n(n+1)}, \end{aligned}$$

于是
$$1 < \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

从而
$$e < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

根据上述不等式, 有

$$0 < a_{n+1} < a_n, n = 1, 2, \cdots,$$

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

于是 $\{a_n\}$ 为单调递减且有下界的数列, 因而有有限极限 A , 又数列 $\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\}$ 单调递增且有上界

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_n < a_1,$$

从而有极限, 又由

$$e^{-\frac{1}{12n}} \rightarrow 1, (n \rightarrow \infty).$$

因此这两个数列有同一极限 A .

又 对任意的 $n \in \mathbb{N}$,

有
$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < A < a_0.$$

于是 存在 $\theta \in (0, 1)$, 得 $A = a_n e^{-\frac{\theta}{12n}}$

或 $a_n = A e^{\frac{\theta}{12n}}$.

因此 $\frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = A e^{\frac{\theta}{12n}}$,

即 $n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}$, ($\theta = \theta(n)$, $0 < \theta < 1$).

也就是 $n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \epsilon_n)$,

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$.

由沃利斯公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2,$$

及 $n!$ 的表达式有

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{[(2n)!!]^2}{(2n-1)!!} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n} A^2 n^{2n+1} e^{-2n} e^{\frac{\theta}{6n}}}{A \cdot 2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} e^{\frac{\theta}{24n}}} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} A^2 \cdot \frac{n}{2} e^{\frac{\theta}{4n}} = \frac{A^2}{4}, \end{aligned}$$

故 $A^2 = 2\pi$,

即 $A = \sqrt{2\pi}$.

从而有斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \theta \in (0, 1).$$

【3105】 根据欧拉定义, γ 函数 $\Gamma(x)$ 用以下公式确定:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

根据这个公式,

- (1) 把函数 $\Gamma(x)$ 表示成无穷乘积;
- (2) 证明 $\Gamma(x)$ 对于不等于负整数的一切实数 x 均有意义;
- (3) 推导出性质: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;

(4) 对于正整数 n 得出 $\Gamma(n)$ 值.

解 (1) 由

$$\begin{aligned} & \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \\ &= \frac{n^x}{x} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x\left(1+\frac{1}{2}\right)^x\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \\ & \quad \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}, \end{aligned}$$

有
$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

(2) 由(1), $x \neq -n, n \in \mathbb{N}$, 即当 x 为非负整数时, $\Gamma(x)$ 有(1)的无穷乘积形式. 设

$$p_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = 1 + \alpha_n, n = 1, 2, \cdots,$$

其中
$$\alpha_n = \frac{x(x-1)}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛, 故无穷乘积

$$\frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}},$$

绝对收敛.

于是 $\Gamma(x)$ 对 $x \neq -n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 的一切实数 x 皆有意义.

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ 由 } \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{x+n+1} = x,
 \end{aligned}$$

于是 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(4) 令 $x = n-1$, 有

$$\begin{aligned}
 \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
 &= \cdots = (n-1)!.
 \end{aligned}$$

【3106】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 严格可积, 且

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, f_{in} = f(a + i\delta_n) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x) dx}$.

证 令 $p_n = \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in})$,

$$\begin{aligned}
 \text{有 } \ln p_n &= \sum_{i=1}^n \ln(1 + \delta_n f_{in}) = \sum_{i=1}^n [f_{in} \delta_n + O(\delta_n^2)] \\
 &= \sum_{i=1}^n f_{in} \delta_n + O\left(\frac{1}{n}\right),
 \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n f_{in} \delta_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} = \int_a^b f(x) dx,$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x) dx}.$$

【3107】 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (a + ib)}}{\frac{1}{n} \prod_{i=0}^{n-1} (a + ib)} = \frac{2}{e}, \text{ 其中 } a > 0, b > 0.$$

证 设 $t = \frac{b}{a}$, 则 $t > 0$, 于是

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (a+ib)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a+ib)} = \frac{\sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1+it)}}{\frac{a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1+it)} \\
 &= \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1+it)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1+it)},
 \end{aligned}$$

又当 n 充分大时有

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} (1+it) &= n + t \sum_{i=0}^{n-1} i = n + \frac{t}{2} n(n-1) \\
 &= \frac{t}{2} n^2 + O(n).
 \end{aligned}$$

$$\text{令 } Q_n = \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1+it)},$$

$$\begin{aligned}
 \text{由 } \ln Q_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1+it) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left[\frac{1+it}{1+nt} (1+nt) \right] \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1+nt) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \frac{1+it}{1+nt} \\
 &= \ln(1+nt) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1-\Delta_i),
 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \Delta_i = 1 - \frac{1+it}{1+nt} = \frac{(n-i)t}{1+nt}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

$$\begin{aligned}
 \text{进一步 } \ln Q_n &= \ln(1+nt) + \ln \left(1 + \frac{1}{nt} \right) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \left(1 - \frac{t}{1+nt} j \right) \\
 &= \ln(1+nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{tj}{1+nt} \right)^k \\
 &= \ln(1+nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{1+nt} \right)^k \sum_{j=1}^n j^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\quad - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{1+nt}\right)^k \cdot \left[\frac{1}{k+1} n^{k+1} + O(n^k)\right] \\
&= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k \\
&\quad + O\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k\right) \\
&= \ln(nt) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
&= \ln(nt) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
&= \ln(nt) + \ln\left(1 - \frac{nt}{1+nt}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1+nt}{nt}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^{k+1} + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
&= \ln(nt) + \ln \frac{1}{1+nt} \\
&\quad + \frac{1+nt}{nt} \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^s - \frac{nt}{1+nt} \right] + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
&= \ln(nt) - \ln(1+nt) \\
&\quad - \frac{1+nt}{nt} \ln\left(1 - \frac{nt}{1+nt}\right) - 1 + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
&= \ln(nt) - \ln(1+nt) - \ln \frac{1}{1+nt} - 1 + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
&= \ln(nt) - 1 + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right),
\end{aligned}$$

于是 $Q_n = \frac{nt}{e} \cdot e^{O\left(\frac{1}{n} \ln n\right)}$.

$$\text{故} \quad S_n = \frac{Q_n}{\frac{t}{2}n + O(1)} = \frac{\frac{nt}{e} \cdot e^{O(\frac{1}{n} \ln n)}}{\frac{t}{2}n + O(1)} = \frac{2}{e} \cdot \frac{e^{O(\frac{1}{n} \ln n)}}{1 + O(\frac{1}{n})},$$

$$\text{因此} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{O(\frac{1}{n} \ln n)}}{1 + O(\frac{1}{n})} = \frac{2}{e}.$$

【3108】 设 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 在区间 (a, b) 为连续函数, 且 $|f_n(x)| \leq C_n$ ($n=1, 2, \dots$), 其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 收敛.

证明函数 $F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$ ($|f_n(x)| < 1$) 在区间 (a, b) 是连续函数.

证 1° $F(x)$ 在 $x \in (a, b)$ 上有定义.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 收敛, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, 于是任意 $\delta > 0$, 存在 $N_0 > 0$, 当 $n \geq N_0$ 时, 有 $|f_n(x)| < \delta$ (设 $\delta \in (0, 1)$), 故我们只要研究乘积 $\prod_{n=N_0+1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$ 的收敛性即可.

$$\text{设} \quad \prod_{n=N_0+1}^{\infty} [1 + f_n(x)] = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + g_k(x)], \quad (1)$$

其中 $g_k(x) = f_{N_0+k}(x), k=1, 2, \dots$.

$$\text{令} \quad G(x) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + g_k(x)], \quad (2)$$

由于 $|g_n(x)| < \delta$,

于是 $1 + g_n(x) > 0$.

又 $|g_n(x)| \leq C_{N_0+n}$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} C_{N_0+n}$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 绝对收敛, 于是无穷乘积 ② 绝对收敛, 因为

$$F(x) = G(x) \prod_{n=1}^{N_0} [1 + f_n(x)], \quad (3)$$

于是 $F(x)$ 收敛, 即 $F(x)$ 在 (a, b) 上有定义.

2° $F(x)$ 在 (a, b) 上连续.

由 ③ 知只要 $G(x)$ 在 (a, b) 上连续即可.

因 $G(x) > 0, x \in (a, b)$,

于是可令 $L(x) = \ln G(x)$,

$$\begin{aligned} \text{有} \quad L(x) &= \ln G(x) = \ln \prod_{n=1}^{\infty} [1 + g_n(x)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln [1 + g_n(x)], \end{aligned}$$

而 $|g_n(x)| \leq C_{N_0+n}, C_{N_0+n} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1,$$

有 存在 $n_0 > 0$, 当 $n > n_0$ 时, 对任意的 $x \in (a, b)$, 皆有 $|\ln[1 + g_n(x)]| \leq 2 |g_n(x)| \leq 2C_{n+N_0}$.

根据 $\sum_{n=1}^{\infty} C_{n+N_0}$ 的收敛性知, $L(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛, 且每一项皆在 (a, b) 上连续, 于是 $G(x)$ 在 (a, b) 上连续, 因此, $F(x)$ 在 (a, b) 上连续.

【3109】 求函数

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)],$$

的导数的表达式, $F'(x)$ 存在的充分条件是什么?

解 由题意可设

$$1 + f_n(x) \neq 0, x \in (a, b), n = 1, 2, \dots.$$

若在 (a, b) 内任意一点 x 上, 皆有 $\{f_n(x)\}$ 绝对收敛, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty, x \in (a, b), \quad (1)$$

则 $\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$ 在 (a, b) 内收敛, 且 $F(x) \neq 0$.

于是可令

$$G(x) = \ln |F(x)|, \quad (2)$$

对 ② 作形式求导有

$$G'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)},$$

$$\text{即} \quad F'(x) = F(x)G'(x). \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad G'(x) &= \left(\ln \left| \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)] \right| \right)' \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln |1 + f_n(x)| \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\ln |1 + f_n(x)|)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}, \end{aligned} \quad (4)$$

为使(4)式的运算有意义,我们有如下充分条件:

$f_n(x)$ 可导,且

$$|f'_n(x)| \leq C_n, \sum_{n=1}^{\infty} C_n < +\infty, x \in (a, b). \quad (5)$$

于是我们得一个充分条件:在条件①,⑤之下, $F(x)$ 在 (a, b) 内可导,且

$$F'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}, \quad (6)$$

设任意 $x_0 \in (a, b)$, 取 a_1, b_1 , 使 $a < a_1 < x_0 < b_1 < b$, 下证

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|, \quad (7)$$

在 (a_1, b_1) 上一致收敛,由条件① $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$ 绝对收敛,由⑤式,当 $x \in (a_1, b_1)$ 时,有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x_0)| &= |f'_n(\xi_n)(x - x_0)| \\ &\leq (b_1 - a_1)C_n, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 ξ_n 介于 x_0 和 x 之间,由 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 收敛,知

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_n(x_0)|, \quad (9)$$

在 (a_1, b_1) 上一致收敛,从而级数⑦在 (a_1, b_1) 上一致收敛.

于是,存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (a_1, b_1)$, 皆有

$$|f_n(x)| < \frac{1}{2}, \quad (10)$$

$$|\ln[1+f_n(x)]| \leq 2|f_n(x)|, \quad (11)$$

恒成立.

由 ⑩ 式与 ⑤ 式有, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (a_1, b_1)$, 皆有

$$\left| \frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)} \right| \leq 2C_n. \quad (12)$$

又由 ⑪ 式和 ⑫ 式及 ⑦ 在 (a_1, b_1) 的一致收敛性知,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln|1+f_n(x)| \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)},$$

皆在 (a_1, b_1) 上一致收敛, 从而 ④ 式中的逐项求导是合理的, 即 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导, 且 ④ 式成立, 由 ② 式知

$$|F(x)| = e^{G(x)}, \quad (13)$$

又由 ⑧ 式有: 当 $x \in (a_1, b_1)$ 时

$$|f(x)| \leq (b_1 - a_1)C_n + |f_n(x_0)| = d_n, n = 1, 2, \dots.$$

由已知条件 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛, 及 3108 题结论知 $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 上连续.

因为 $F(x) \neq 0$, 于是 $F(x) > 0, x \in (a_1, b_1)$, 从而 ⑬ 式为

$$F(x) = e^{G(x)}, x \in (a_1, b_1), \quad (14)$$

或 $F(x) < 0, x \in (a_1, b_1)$,

这时 ⑬ 式为

$$F(x) = -e^{G(x)}, x \in (a_1, b_1), \quad (15)$$

在 ⑭ 式成立的情形, 由 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导有 $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导, 且

$$F'(x) = e^{G(x)} G'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}.$$

在 ⑮ 式成立的情形, 由 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导有 $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导, 且

$$F'(x) = -e^{G(x)} G'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}.$$

总之,在 (a_1, b_1) 上⑥式必成立,特别在点 x_0 成立.

综上所述,若条件①和条件⑤成立,且设

$$1 + f_n(x) \neq 0, \quad x \in (a, b), \quad n = 1, 2, \dots,$$

则在 (a, b) 内 $F'(x)$ 存在且有公式⑥成立.

【3110】 证明:若 $0 < x < y$,则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} = 0.$$

证 令

$$p_n = \frac{x+n}{y+n}, n = 1, 2, 3, \dots$$

由于 $0 < x < y$,于是 $0 < p_n < 1$,由题意,我们要证明无穷乘积 $\frac{x}{y} \prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散到零,因为部分乘积 $\prod_{k=1}^n p_k$ 是正的递减的,于是只要证明它是发散的就够了,令

$$p_n = 1 + \alpha_n,$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \alpha_n = p_n - 1 &= \frac{1 + \frac{x}{n}}{1 + \frac{y}{n}} - 1 \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right)^{-1} - 1 \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left[1 - \frac{y}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - 1 \\ &= \left[1 - \frac{y-x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - 1 \\ &= -\frac{y-x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

于是当 n 充分大时, α_n 保号,由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y-x}{n}$ 发散,有

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 发散,因此,原无穷乘积发散,它发散到零,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{y} \prod_{k=1}^n \frac{x+k}{y+k}$$

$$= \frac{x}{y} \prod_{k=1}^{\infty} p_k = 0.$$

§ 10. 斯特林公式

当 n 值很大时, 可用斯特林公式:

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1),$$

计算 $n!$ 值.

利用斯特林公式, 近似计算 (3111 ~ 3117).

【3111】 $\lg 100!$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lg 100! &= \lg \left\{ \sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta}{12 \cdot 100}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\lg 2 + \lg \pi + \lg 100) + 100 \lg 100 \\ &\quad - 100 \lg e + \frac{\theta}{1200} \lg e \\ &= \frac{1}{2} (0.3010 + 0.4971 + 2) + 200 - 100 \\ &\quad \times 0.4343 + 0.004\theta \\ &= 157.9691 + 0.0004\theta. \quad (\theta \in (0, 1)). \end{aligned}$$

【3112】 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1999$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 1999 &= \frac{2000!}{2^{1000} \cdot 1000!} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2000} \cdot 2000^{2000} \cdot e^{-2000} \cdot e^{\frac{\theta_1}{21000}}}{2^{1000} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 1000} \cdot 1000^{1000} \cdot e^{-1000} \cdot e^{\frac{\theta_2}{12000}}} \\ &= 7.09 \cdot 10^{2866} \cdot e^{\frac{\theta}{12000}} \\ &\approx 7.09 \times 10^{2866} \times \left(1 + \frac{\theta}{12000} \right). \end{aligned}$$

其中 $\theta_1 \in (0, 1), \theta_2 \in (0, 1), |\theta| < 1$.

【3113】 $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 100}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= \frac{100!}{2^{100}(50!)^2} = \frac{\sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{2^{100} \cdot 100\pi \cdot 50^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{300}}} \\
 &= 0.0798e^{\frac{\theta}{300}} \approx 0.0798\left(1 + \frac{\theta}{300}\right),
 \end{aligned}$$

其中 $\theta_1 \in (0, 1), \theta_2 \in (0, 1), |\theta| < 1$.

【3114】 C_{100}^{40} .

$$\begin{aligned}
 \text{解 } C_{100}^{40} &= \frac{100!}{40!60!} \\
 &= \frac{\sqrt{200\pi} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2\pi \cdot 40} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 60} \cdot 60^{60} \cdot 40^{40} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{120} + \frac{\theta_3}{720}}} \\
 &= 10^{28} \cdot 1.378e^{\frac{\theta}{288}} \approx 10^{28} \times 1.378\left(1 + \frac{\theta}{288}\right),
 \end{aligned}$$

其中 $\theta_1 \in (0, 1), \theta_2 \in (0, 1),$
 $\theta_3 \in (0, 1), |\theta| < 1$.

【3115】 $\frac{100!}{20! \cdot 30! \cdot 50!}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2^3 \pi^3} \cdot 20 \cdot 30 \cdot 50 \cdot 20^{20} \cdot 30^{30} \cdot 50^{50} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{240} + \frac{\theta_3}{360} + \frac{\theta_4}{600}}} \\
 &= 10^{42} \times 4.792e^{\frac{\theta}{120}} \\
 &\approx 10^{42} \times 4.972\left(1 + \frac{\theta}{120}\right),
 \end{aligned}$$

其中 $\theta_1 \in (0, 1), \theta_2 \in (0, 1), \theta_3 \in (0, 1),$
 $\theta_4 \in (0, 1), |\theta| < 1$.

【3116】 $\int_0^1 (1-x^2)^{50} dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &\stackrel{\text{令 } x = \sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{101} t dt \\
 &= \frac{(100)!!}{(101)!!} = \frac{2^{100} \cdot (50!)^2}{(101)!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{100} \cdot 100\pi \cdot 50^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{300}}}{101 \cdot \sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{1200}}} \\
&= \frac{10\sqrt{\pi}}{101\sqrt{2}} e^{\frac{\theta}{300}} = 0.1241 e^{\frac{\theta}{300}} \\
&= 0.1241 \left(1 + \frac{\theta}{300}\right),
\end{aligned}$$

其中 $\theta_i \in (0, 1), i = 1, 2, |\theta| < 1$.

【3117】 $\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx.$

解 由

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi},$$

对每一部分分别作变量代换

$$x = t, x = t + \frac{\pi}{2},$$

$$x = t + \pi, x = t + \frac{3\pi}{2},$$

及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt,$

有 $\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{200} x dx.$

由 2281 题结论和斯特林公式有

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^{100} x dx &= 4 \cdot \frac{(199)!!}{(200)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{200!}{2^{200} (100!)^2} \cdot 2\pi \\
&= \frac{2\pi \sqrt{2\pi \cdot 200} \cdot 200^{200} \cdot e^{-200} \cdot e^{\frac{\theta_1}{2400}}}{2^{200} \cdot 200\pi \cdot 100^{200} \cdot e^{-200} \cdot e^{\frac{\theta_2}{600}}} \\
&= 0.355 \times e^{\frac{\theta}{600}} \approx 0.355 \left(1 + \frac{\theta}{600}\right),
\end{aligned}$$

其中 $\theta_i \in (0, 1), i = 1, 2, |\theta| < 1$.

【3118】 推导出下列乘积的渐近公式:

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (2n-1)!! &= \frac{2n!}{2^n n!} = \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} \cdot (2n)^{2n} e^{-2n} e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2^n \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{\frac{\theta_2}{12n}}} \\ &= \sqrt{2} (2n)^n e^{-n + \frac{\theta}{12n}}, \end{aligned}$$

其中 $\theta_i \in (0, 1), i = 1, 2, |\theta| < 1$.

【3119】 若 n 很大, 近似计算 C_{2n}^n .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad C_{2n}^n &= \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!} \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\sqrt{2\pi \cdot n} \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2\pi n \cdot n^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot e^{\frac{\theta_2}{6n}}} \\ &= \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} e^{\frac{\theta}{6n}}, \end{aligned}$$

其中 $\theta_i \in (0, 1), i = 1, 2, \dots, |\theta| < 1$.

【3120】 利用斯特林公式, 求下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!}; & \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}; \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}; & \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}. \end{aligned}$$

$$\text{解} \quad (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[n^2]{\sqrt{2\pi n}} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot e^{-\frac{1}{n}} e^{\frac{\theta}{12n^3}} \right] = 1.$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}} \cdot n \cdot e^{-1} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}} = e. \end{aligned}$$

(3) 由 3118 题结论有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[2n]{2} \cdot 2n \cdot e^{-1} e^{\frac{\theta}{12n^2}}} = \frac{e}{2}.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln \pi + \ln n) + n \ln n - n + \frac{\theta}{12n}}{n \ln n} = 1.$$

§ 11. 用多项式逼近连续函数

1. 拉格朗日插值公式 拉格朗日多项式:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} y_i$$

具有 $P_n(x_i) = y_i (i = 0, 1, \dots)$ 的性质.

2. 伯恩斯坦多项式 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 是连续函数, 则伯恩斯坦多项式:

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i},$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时在区间 $[0, 1]$ 一致收敛于函数 $f(x)$.

【3121】 运用给定的数组, 作出最低的 n 次幂的多项式 $P_n(x)$

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

$P_n(-1), P_n(1), P_n(6)$ 近似地等于多少?

解 由 $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 5; y_0 = 5, y_1 = 1, y_2 = -3, y_3 = 1$, 有

$$\begin{aligned} P_3(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3. \end{aligned}$$

以 $(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, 3$ 代入上式有

$$P_3(x) = 1 - \frac{55}{21}x - \frac{1}{14}x^2 + \frac{5}{42}x^3,$$

$$P_3(-1) = 1 + \frac{55}{21} - \frac{1}{14} - \frac{5}{42} \approx 3.43,$$

$$P_3(1) = 1 - \frac{55}{21} - \frac{1}{14} + \frac{5}{42} \approx -1.57,$$

$$P_3(6) = 1 - \frac{110}{7} - \frac{18}{7} + \frac{180}{7} \approx 8.43.$$

【3122】 写出经过三个点 $A(x_0-h, y_{-1}), B(x_0, y_0), C(x_0+h, y_1)$ 的抛物线方程式:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

解 将三点的坐标代入拉格朗日插入公式有

$$\begin{aligned} y &= \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{[(x_0-h)-x_0][(x_0-h)-(x_0+h)]}y_{-1} \\ &+ \frac{(x-x_0+h)(x-x_0-h)}{[x_0-(x_0-h)][x_0-(x_0+h)]}y_0 \\ &+ \frac{(x-x_0+h)(x-x_0)}{[(x_0+h)-(x_0-h)][(x_0+h)-x_0]}y_1 \\ &= y_0 + \frac{y_1-y_{-1}}{2h}(x-x_0) + \frac{y_1-2y_0+y_{-1}}{2h^2} \cdot (x-x_0)^2. \end{aligned}$$

【3123】 利用数值 $x_0=1, y_0=1; x_1=25, y_1=5; x_2=100, y_2=10$, 推导出开方根: $y=\sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 100$) 的近似公式.

$$\begin{aligned} \text{解 } y &\approx \frac{(x-25)(x-100)}{(-24) \cdot (-90)} \cdot 1 + \frac{(x-1)(x-100)}{24 \cdot (-75)} \cdot 5 \\ &+ \frac{(x-1)(x-25)}{99 \cdot 75} \cdot 10 \\ &= 0.808 + 0.193x - 0.00101x^2, \end{aligned}$$

如 $x=4, y \approx 1.564$ (实值为 2),

$x=9, y \approx 2.463$ (实值为 3),

$x=16, y \approx 3.637$ (实值为 4),

$x=36, y \approx 6.447$ (实值为 6).

误差较大.

【3124】 利用数值

$$\sin 0^\circ = 0, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 90^\circ = 1,$$

推导出以下的近似公式:

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3, (0 \leq x \leq 90),$$

利用这个公式, 近似计算:

$$\sin 20^\circ, \quad \sin 40^\circ, \quad \sin 80^\circ.$$

解 将 $x = 30^\circ, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, x = 90^\circ, \sin 90^\circ = 1$ 代入近似

公式 $\sin x^\circ \approx ax + bx^3$ 有

$$\begin{cases} 30a + 27000b = \frac{1}{2}, \\ 90a + 729000b = 1. \end{cases}$$

$$\text{解之有 } a = \frac{5}{288}, b = -\frac{5}{288} \left(\frac{1}{150} \right)^2.$$

$$\text{于是 } \sin x^\circ \approx \frac{5x}{288} \left(1 - \left(\frac{x}{150} \right)^2 \right).$$

由此我们有

$$\sin 20^\circ \approx 0.341, \quad \sin 40^\circ \approx 0.645,$$

$$\sin 80^\circ \approx 0.994.$$

$$\text{查表有 } \sin 20^\circ = 0.3420, \quad \sin 40^\circ = 0.6428,$$

$$\sin 80^\circ = 0.9848.$$

误差较小.

【3125】 取 $x = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ 作为插值点, 对函数 $f(x) = |x|$ 在区间 $[-1, 1]$ 作出拉格朗日插值多项式.

解 以 $x_i = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, y_i = 0, \frac{1}{2}, 1$ 代入拉格朗日多项式有

$$\begin{aligned} P(x) = & \frac{x \left(x - \frac{1}{2} \right) (x^2 - 1)}{\left(-\frac{1}{2} \right) (-1) \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)} \cdot \frac{1}{2} \\ & + \frac{x \left(x + \frac{1}{2} \right) (x^2 - 1)}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x(x-1)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)}{(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)} \cdot 1 \\
& + \frac{x(x+1)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)}{1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2} \cdot 1 \\
& = \frac{x^2}{3}(7-4x^2), |x| \leq 1.
\end{aligned}$$

【3126】 用拉格朗日多项式代换函数 $y(x)$, 近似计算

$\int_0^2 y(x) dx$, 其中

x	0	0.5	1	1.5	2
$y(x)$	5	4.5	3	2.5	5

解 $y(x) \approx \frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(-0.5)(-1)(-1.5)(-2)} \cdot 5$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x(x-1)(x-1.5)(x-2)}{0.5 \cdot (-0.5) \cdot (-1) \cdot (-1.5)} \cdot 4.5 \\
& + \frac{x(x-0.5)(x-1.5)(x-2)}{1 \cdot 0.5(-0.5) \cdot (-1)} \cdot 3 \\
& + \frac{x(x-0.5)(x-1)(x-2)}{1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot (-0.5)} \cdot 2.5 \\
& + \frac{x(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{2 \cdot 1.5 \cdot 1 \cdot 0.5} \cdot 5 \\
& = \left(\frac{10}{3}x^4 - \frac{50}{3}x^3 + \frac{87.5}{3}x^2 - \frac{62.5}{3}x + 5\right) \\
& + (-12x^4 + 54x^3 - 78x^2 + 36x) \\
& + (12x^4 - 48x^3 + 57x^2 - 18x) \\
& + \left(-\frac{20}{3}x^4 + \frac{70}{3}x^3 - \frac{70}{3}x^2 + \frac{20}{3}x\right) \\
& + \left(\frac{10}{3}x^4 - 10x^3 + \frac{27.5}{3}x^2 - 2.5x\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{4}{3}x + 5,$$

于是
$$\begin{aligned}\int_0^2 y(x) dx &\approx \int_0^2 \left(\frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{4}{3}x + 5 \right) dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^4 - 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 5x \right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

【3127】 作出函数 x, x^2, x^3 在区间 $[0, 1]$ 的波恩斯坦多项式 $B_n(x)$.

解 1° $f(x) = x$,

则
$$\begin{aligned}B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= x[x + (1-x)]^{n-1} = x.\end{aligned}$$

2° $f(x) = x^2$,

则
$$\begin{aligned}B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} C_n^1 x (1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} C_n^2 x^2 (1-x)^{n-2} \\ &\quad + \frac{3^2}{n^2} C_n^3 x^3 (1-x)^{n-3} + \dots \\ &\quad + \frac{(n-1)^2}{n^2} C_n^{n-1} x^{n-1} (1-x) + \frac{n^2}{n^2} C_n^n x^n \\ &= \frac{1}{n} x (1-x)^{n-1} + \frac{2(n-1)}{n} x^2 (1-x)^{n-2} \\ &\quad + \frac{3}{n} \frac{(n-1)(n-2)}{2!} x^3 (1-x)^{n-3} + \dots \\ &\quad + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!} x^{n-1} (1-x) + x^n \\ &= \frac{1}{n} (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) x (1-x)^{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{n}(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2)x^2 \cdot (1-x)^{n-2} \\
& + \frac{3}{n}(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3)x^3(1-x)^{n-3} + \cdots \\
& + \frac{n-1}{n}(C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1})x^{n-1}(1-x) \\
& + x^n - \left[\frac{1}{n}C_{n-1}^1x(1-x)^{n-1} + \frac{2}{n}C_{n-1}^2x^2(1-x)^{n-2} \right. \\
& \left. + \cdots + \frac{n-1}{n}C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}(1-x) \right] \\
& = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \cdot x^k(1-x)^{n-k} \\
& \quad - \frac{n-1}{n}x(1-x) \cdot \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k(1-x)^{n-k-2} \\
& = x - \frac{n-1}{n}x(1-x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}$$

$$3^\circ \quad f(x) = x^3$$

$$\begin{aligned}
\text{则} \quad B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^3}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1^2}{n^2} C_{n-1}^0 x(1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} C_{n-1}^1 x^2(1-x)^{n-2} \\
&\quad + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} C_{n-1}^{n-2} x^{n-1}(1-x) + x^n \\
&= \frac{1^2}{n^2} (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) x(1-x)^{n-1} \\
&\quad + \frac{2^2}{n^2} (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) x^2 \cdot (1-x)^{n-2} + \cdots \\
&\quad + \frac{(n-1)^2}{n^2} (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) x^{n-1}(1-x) + x^n \\
&\quad - \left[\frac{1^2}{n^2} C_{n-1}^1 x(1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} C_{n-1}^2 x^2(1-x)^{n-2} \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} C_{n-1}^{n-1} x^{n-1}(1-x) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x(1-x) \left[\frac{1}{n-2} C_{n-2}^0 (1-x)^{n-2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{n-2} C_{n-2}^1 x(1-x)^{n-3} + \cdots + \frac{n-1}{n-2} C_{n-2}^{n-2} x^{n-2} \right] \\
&= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x(1-x) \\
&\quad \cdot \left[\frac{1}{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k}{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} \right] \\
&= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2} \\
&\quad \cdot \left[\frac{x}{n-2} \sum_{k=0}^{n-3} C_{n-3}^k x^k (1-x)^{n-3-k} + 1 \right] \\
&= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \\
&\quad - \frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2} \left(\frac{x}{n-2} + 1 \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) x^3 + \frac{3}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right) x^2 + \frac{1}{n^2} x.
\end{aligned}$$

【3128】 对于在区间 $[a, b]$ 指定的函数 $f(x)$, 写出波恩斯坦多项式 $B_n(x)$ 的公式.

解 令 $a + (b-a)y = x$, 故当 $0 \leq y \leq 1$ 时 $x \in [a, b]$, 即

$$y = \frac{x-a}{b-a}, \quad 1-y = \frac{b-x}{b-a},$$

$$f(x) = f(a + (b-a)y).$$

从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的伯恩斯坦多项式为

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(a + (b-a) \frac{k}{n}\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

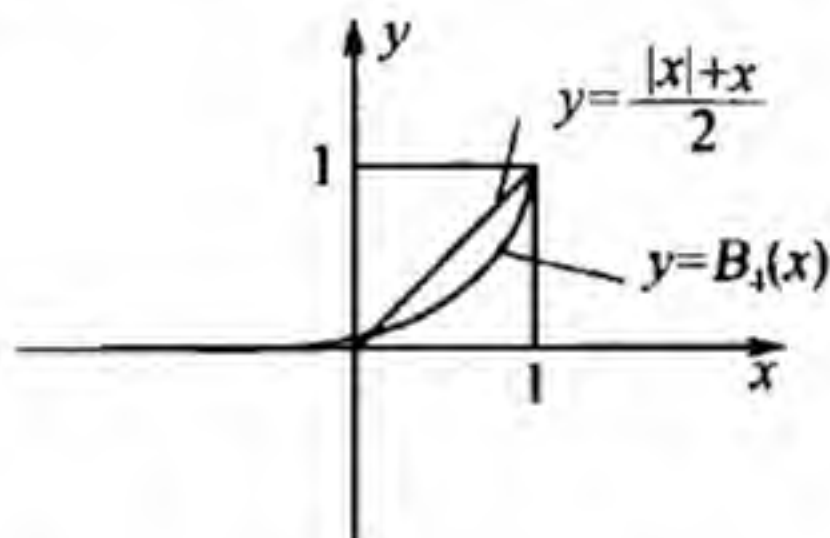
【3129】 在区间 $[-1, 1]$ 用波恩斯坦多项式 $B_n(x)$ 逼近函数

$f(x) = \frac{|x|+x}{2}$, 作出函数 $y = \frac{|x|+x}{2}$ 和 $y = B_4(x)$ 的图形.

解 由 3128 结论知

$$\begin{aligned} B_4(x) &= \sum_{k=0}^4 f\left(-1 + \frac{k}{2}\right) C_4^k \cdot \frac{(x+1)^k (1-x)^{4-k}}{2^4} \\ &= \frac{1}{2} C_4^3 \cdot \frac{(x+1)^3 (1-x)}{4} + 1 \cdot C_4^4 \cdot \frac{(x+1)^4}{2^4} \\ &= \frac{1}{8} (1-x)(1+x)^3 + \frac{1}{16} (1+x)^4, \end{aligned}$$

函数 $y = \frac{|x|+x}{2}$ 和 $y = B_4(x)$ 的图形如 3129 题图所示.



3129 题图

注: $y = B_4(x)$, 当 $x = -1$ 时, $B_4(-1) = 0$, 当 $x = 1$ 时, $B_4(1) = 1$, 当 $x = 0$ 时, $B_4(0) = \frac{3}{16}$, 又 $y' = \frac{(1+x)^2}{4} (2-x)$, 当 $x = -1$ 时, $y' = 0$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $y' > 0$, 于是 $B_4(x)$ 图形上升, 又 $y'' = \frac{3}{4} (1-x^2) \geq 0$, 故图形向上凹.

【3130】 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 用偶次波恩斯坦多项式逼近函数 $f(x) = |x|$.

解 由 3128 题结论有

$$\begin{aligned} B_{2n}(x) &= \sum_{k=0}^{2n} \left| -1 + \frac{k}{n} \right| C_{2n}^k \frac{(x+1)^k (1-x)^{2n-k}}{2^{2n}} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{n} C_{2n}^k (x+1)^k (1-x)^{2n-k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k-n}{n} C_{2n}^k \cdot (x+1)^k (1-x)^{2n-k} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{n} C_{2n}^k \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-k} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k-n}{n} C_{2n}^k \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-k} \right\} \\
&= \left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_{2n}^{n-k} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2n}^{n+k} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-k} \right\} \\
&= \left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2n}^{n-k} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2n}^{n+k} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k \right\},
\end{aligned}$$

由 $C_{2n}^{n-k} + C_{2n}^{n+k}$

$$= C_{2n}^{n-k} \left[1 + \frac{(n+k)(n+k+1)\cdots(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n+k)} \right]$$

$$= 2C_{2n}^{n-k},$$

有 $C_{2n}^{n-k} = C_{2n}^{n+k}.$

因此 $B_{2n}(x)$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n \sum_{k=1}^n \left\{ k C_{2n}^{n-k} \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k \right] \right\}.$$

【3131】 写出下列函数的波恩斯坦多项式 $B_n(x)$:

$$f(x) = e^{kx} \quad (a \leq x \leq b).$$

解 $B_n(x)$

$$= \sum_{j=0}^n e^{k(a+(b-a)\frac{j}{n})} C_n^j \frac{(x-a)^j (b-x)^{n-j}}{(b-a)^n}$$

$$= \frac{e^{ka}}{(b-a)^n} \sum_{j=0}^n e^{k\frac{(b-a)}{n}j} C_n^j (x-a)^j (b-x)^{n-j}$$

$$= \frac{e^{ka}}{(b-a)^n} [e^{\frac{b-a}{n}k} (x-a) + (b-x)]^n$$

$$= e^{ka} \left[e^{\frac{b-a}{n}k} \frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} \right]^n$$

$$= e^{ka} \left[(e^{\frac{b-a}{n}k} - 1) \frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x+x-a}{b-a} \right]^n$$

$$= e^{ka} \left[1 + (e^{\frac{b-a}{n}k} - 1) \frac{x-a}{b-a} \right]^n.$$

【3132】 计算函数 $f(x) = \cos x$ 在区间 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 的多项式 $B_n(x)$.

解 因为 $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, ①

由 3131 题结论, 令 $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$, 并分别令 $k = i, k = -i$, 得 e^{ix} 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的伯恩斯坦多项式 $B_n^{(1)}(x)$ 和 e^{-ix} 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的伯恩斯坦多项式 $B_n^{(2)}(x)$ 分别为:

$$B_n^{(1)}(x) = e^{-\frac{\pi}{2}i} \left[1 + (e^{\frac{i\pi}{n}} - 1) \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right) \right]^n$$

$$B_n^{(2)}(x) = e^{\frac{\pi}{2}i} \left[1 + (e^{-\frac{i\pi}{n}} - 1) \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right) \right]^n,$$

于是

$$B_n^{(1)}(x) = e^{-\frac{\pi}{2}i} \left\{ e^{\frac{\pi i}{2n}} \left[e^{-\frac{\pi i}{2n}} + (e^{\frac{\pi i}{2n}} - e^{-\frac{\pi i}{2n}}) \cdot \left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \right]^n \right.$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}i} e^{\frac{\pi i}{2n}} \left[\cos \frac{\pi}{2n} - i \sin \frac{\pi}{2n} + 2i \sin \frac{\pi}{2n} \left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \right]^n$$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n.$$

同理得 $B_n^{(2)}(x) = \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n.$

由 ① 式, $\cos x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$ 为

$$B_n(x) = \frac{1}{2} [B_n^{(1)}(x) + B_n^{(2)}(x)]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n + \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n \right]$$

$$+ \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n \Big].$$

【3133】 证明:在区间 $[-1, 1]$ 上, $|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$, 其中

$$P_n(x) = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{i=2}^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2i-3)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2i)} (1-x^2)^i.$$

证 $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1-t}$, 其中 $t = 1-x^2$,

$$\text{又} \quad \sqrt{1-t} = 1 + \frac{1}{2}(-t)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right)}{n!} (-t)^n \\ & = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+3)}{n! 2^n} (-1)^n t^n \\ & = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} (-1)^{2n-1} t^n \\ & = 1 - \frac{t}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} t^n, \end{aligned}$$

$$-1 < t < 1. \quad \textcircled{1}$$

当 $t = \pm 1$ 时, 上式右端级数为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (\pm 1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

$$\text{而} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n+2}{2n-1} - 1 \right) = \frac{3}{2} > 1,$$

于是 $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛, 因此由阿贝尔定理, ①式当 $t = \pm 1$ 时也成立, 即

$$\sqrt{1-t} = 1 - \frac{t}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} t^n,$$

$$t \in [-1, 1]. \quad \textcircled{2}$$

故把 $t = 1-x^2$ 代入, 有

$$|x| = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (1-x^2)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x), x \in [-1, 1]. \quad (3)$$

【3133. 1】 设

$$f(x) \in C[a, b],$$

$$M_k = \int_a^b x^k f(x) dx = 0, (k = 0, 1, 2, \dots),$$

证明: 当 $x \in [a, b]$ 时, $f(x) \equiv 0$.

证 因为 $f \in C[a, b]$, 由 Weierstrass 定理,

$$\text{任意 } \epsilon > 0, \text{ 存在 } P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

$$\text{有 } |f(x) - P_n(x)| < \epsilon, x \in [a, b].$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \int_a^b f^2(x) dx &= \int_a^b f \cdot (f - P_n + P_n) dx \\ &= \int_a^b f \cdot (f - P_n) dx + \int_a^b f P_n dx \\ &= \int_a^b f \cdot (f - P_n) dx \leq \int_a^b |f| |f - P_n| dx \leq M \epsilon, \end{aligned}$$

其中 $M = \int_a^b |f| dx$ 为常数.

由 $\epsilon > 0$ 的任意性知

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0,$$

$$\text{于是 } f^2(x) = 0, x \in [a, b],$$

$$\text{即 } f(x) = 0, x \in [a, b].$$

【3134】 设 $f(x)$ 为 2π 周期的连续函数, $a_n, b_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 为它的傅里叶系数. 证明费叶尔三角多项式:

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) (a_i \cos ix + b_i \sin ix),$$

在区间 $(-\pi, \pi)$ 一致收敛到函数 $f(x)$.

解 注: 在所设条件下, 只能断言: 对任何 $\epsilon > 0$, $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 一般不能推出 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于 $f(x)$, 但若假设 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

今把 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上函数值按周期为 2π 延拓到整个 $(-\infty, \infty)$

$\infty, +\infty)$ 上, 延拓后的函数仍记为 $f(x)$, 设 $f(x)$ 的傅里叶级数部分和

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u-x) \right] du \end{aligned}$$

因为 $2 \sin \frac{v}{2} \cos mv = \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) v - \sin \left(m - \frac{1}{2} \right) v,$
 $m = 1, 2, \dots, n.$

于是
$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(2n+1) \frac{u-x}{2}}{2 \sin \frac{u-x}{2}} du$$

$$\stackrel{\text{令 } u-x=t}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

又以周期为 2π 的函数 $F(u)$ 在长为 2π 的闭区间 $[\lambda, \lambda+2\pi]$ 上的积分 $\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} F(u) du$ 与 λ 无关, 从而上式右端的积分 $\int_{-\pi-x}^{\pi-x}$ 可换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$. 又 $\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi}$, 且在 $\int_{-\pi}^0$ 中作代换 $t = -s$, 我们有

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

显然
$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x),$$

故
$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt,$$

因为
$$2 \sin \frac{t}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{n-1} [\cos kt - \cos(k+1)t] \\
 &= 1 - \cos nt = 2\sin^2 \frac{nt}{2},
 \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt. \quad (1)$$

又在①中令 $f(x) = 1$, 则 $S_n(x) = 1$, 故 $\sigma_n(x) = 1$, 于是有

$$\frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt = 1. \quad (2)$$

① - ② $\times f(x)$ 有

$$\begin{aligned}
 \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x) \\
 &\quad + f(x-t) - f(x)] \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt, \quad (3)
 \end{aligned}$$

由此, 我们将有如下的结论

1° 对任何 $\epsilon > 0$, $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

2° 若又有 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

1° 的证明: 设 $\epsilon > 0$, 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 于是存在 $M > 0$, 有

$$|f(x)| \leq M, x \in (-\infty, +\infty).$$

注意, 延拓后的函数在点 $x = \pi, x = -\pi$ 可能不连续(可能有第一类间断点), 但在 $(-\pi, \pi)$ 上连续, 因此, 在 $[-\pi + \frac{\epsilon}{2}, \pi - \frac{\epsilon}{2}]$ 上一致连续, 于是对任给的 $\eta > 0$, 存在 $\delta > 0$,

对所有 x', x'' 为 $[-\pi + \frac{\epsilon}{2}, \pi - \frac{\epsilon}{2}]$ 上两点, 当 $|x' - x''| \leq \delta$, 有

$|f(x') - f(x'')| < \frac{\eta}{2}$, 令 $\tau = \min\left\{\delta, \frac{\epsilon}{2}\right\}$, 由 ③ 式有

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\tau [f(x+t) - f(x) + f(x-t) - f(x)] \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2n\pi} \int_\tau^\pi [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (4)$$

当 $0 \leq t \leq \tau$, $-\pi + \epsilon \leq x \leq \pi - \epsilon$ 时, 有

$$x+t \in \left[-\pi + \frac{\epsilon}{2}, \pi - \frac{\epsilon}{2}\right],$$

$$x-t \in \left[-\pi + \frac{\epsilon}{2}, \pi - \frac{\epsilon}{2}\right].$$

从而 $|f(x+t) - f(x)| < \frac{\eta}{2}$,

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\eta}{2}.$$

因此, 当 $x \in [-\pi + \eta, \pi - \eta]$ 时, 有

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{2n\pi} \int_0^\tau [|f(x+t) - f(x)| \\ &\quad + |f(x-t) - f(x)|] \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt \\ &< \frac{\eta}{2} \cdot \frac{1}{n\pi} \int_0^\tau \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt < \frac{\eta}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

又当 $t \in [\tau, \pi]$ 时

$$\left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}},$$

于是,当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,有

$$|I_2| \leq \frac{1}{2n\pi} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}} \int_{\tau}^{\pi} 4M dt < \frac{2M}{n \sin^2 \frac{\tau}{2}}, \quad (6)$$

由 ④, ⑤, ⑥ 知, 当 $-\pi + \varepsilon \leq x \leq \pi - \varepsilon$ 时, 有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\eta}{2} + \frac{2M}{n \sin^2 \frac{\tau}{2}}, n = 1, 2, \dots$$

令 $N = \left\lceil \frac{4M}{\eta \sin^2 \frac{\tau}{2}} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, $\forall x \in [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$,

皆有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

于是 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

2° 的证明: 因为 $f(-\pi) = f(\pi)$, 于是前述延拓出去后的函数 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 因此, 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上必一致连续, 于是对任意的 $\eta > 0$, 存在 $\tau > 0$ ($\tau < \pi$), 则任何的 $x', x'' \in [-2\pi, 2\pi]$, 当 $|x' - x''| < \tau$ 时, 皆有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\eta}{2}.$$

和 1° 类似, 首先对 τ , 写出 ④ 式, 显然 $0 \leq t \leq \tau$, $-\pi \leq x \leq \pi$ 时, 有 $x+t \in [-2\pi, 2\pi]$, $x-t \in [-2\pi, 2\pi]$, 于是

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\eta}{2},$$

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\eta}{2}.$$

从而, 当 $x \in [-\pi, \pi]$ 时 ⑤ 式成立, 同样 ⑥ 式也成立, 于是当 $n >$

$N = \left\lceil \frac{4M}{\eta \sin^2 \frac{\tau}{2}} \right\rceil$ 时, 对一切 $x \in [-\pi, \pi]$, 恒有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \eta.$$

故 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛.

注记: 若 $f(-\pi) \neq f(\pi)$, 则不一定有 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上一致

收敛于 $f(x)$, 比如设 $f(x) = x, x \in [-\pi, \pi]$, 用反证法, 设 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于 $f(x) = x$, 由狄里克雷定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x), x \in [-\pi, \pi], \quad (7)$$

其中
$$S(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, \pi), \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

故 $S(x)$ 在 $x = \pi$ 和 $x = -\pi$ 不连续, 但由 (7) 式及 138 题结论知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = S(x), x \in [-\pi, \pi]. \quad (8)$$

因为 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于 $S(x)$, 由 (8) 式, 当 $x = \pm\pi$ 时, $\sigma_n(x)$ 也收敛于 $S(x)$, 于是 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 又 $\sigma_n(x)$ 是 x 的连续函数, $x \in [-\pi, \pi]$, 因而极限函数 $S(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 与 $S(x)$ 在 $x = \pi$ 和 $x = -\pi$ 不连续矛盾, 于是 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上不一致收敛于 $f(x) = x$.

【3135】 作出下列函数的费叶尔多项式 $\sigma_{2n-1}(x)$

$$f(x) = |x| \quad \text{当 } (-\pi \leq x \leq \pi) \text{ 时.}$$

解 由 $f(x) = |x|$ 为偶函数有

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1], \quad n = 1, 2, \dots.$$

于是
$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}, k = 1, 2, \dots.$$

从而
$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$